

I. Reconnaître un trinôme, forme canonique et variations

Exercice 1 — Reconnaître un trinôme du second degré

Pour chaque fonction, dire si elle est une fonction polynôme du second degré. Si oui, préciser les coefficients a , b et c .

- a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ b) $g(x) = 7x - 4$ c) $h(x) = -x^2 + 2$ d) $p(x) = x^3 - 2x + 1$
 e) $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ f) $r(x) = (x+1)(x-4)$ g) $s(x) = 5 - (2x-1)^2$ h) $t(x) = \frac{1}{x} + x^2$

Exercice 2 — Forme canonique

Déterminer la forme canonique des fonctions suivantes.

- a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ b) $g(x) = x^2 + 8x + 3$ c) $h(x) = 2x^2 - 8x + 1$
 d) $p(x) = -x^2 + 4x + 7$ e) $q(x) = 3x^2 + 6x - 5$ f) $r(x) = -2x^2 - 12x + 1$

Exercice 3 — Sommet et variations

Pour chaque fonction, déterminer les coordonnées du sommet de la parabole, l'extremum, puis dresser le tableau de variation.

- a) $f(x) = (x-2)^2 - 5$ b) $g(x) = -3(x+1)^2 + 4$ c) $h(x) = 2x^2 - 12x + 7$ d) $p(x) = -x^2 + 10x - 21$

Exercice 4 — Forme canonique et variations – Variante A

Soit $g(x) = -2x^2 + 8x - 1$. Pour cette fonction :

- a) déterminer la forme canonique ;
 b) donner les coordonnées du sommet ;
 c) Établir le tableau de variations et préciser l'extremum.

Exercice 5 — Forme canonique et variations – Variante B

Soit $h(x) = x^2 + 4x - 1$. Pour cette fonction :

- a) déterminer la forme canonique ;
 b) donner les coordonnées du sommet ;
 c) établir le tableau de variations et préciser l'extremum.

II. Discriminant, racines et factorisation

Exercice 6 — Calculer un discriminant

Pour chaque trinôme, calculer le discriminant et donner le nombre de racines réelles.

- a) $x^2 - 5x + 6$ b) $x^2 + 4x + 4$ c) $x^2 + 2x + 8$ d) $2x^2 - 3x + 1$
 e) $-x^2 + 6x - 9$ f) $3x^2 + 2x - 1$ g) $4x^2 - 12x + 9$ h) $5x^2 + x + 2$

Exercice 7 — Résoudre avec le discriminant

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x^2 - 4x + 4 = 0$ c) $x^2 + 6x + 13 = 0$ d) $2x^2 - 5x + 2 = 0$
 e) $3x^2 + 4x + 1 = 0$ f) $-x^2 + 8x - 12 = 0$ g) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ h) $5x^2 - 2x + 1 = 0$

Exercice 8 — Factoriser

Factoriser les trinômes suivants lorsque c'est possible dans $\mathbb{R}$.

a) $x^2 - 9x + 20$

b) $x^2 + 10x + 25$

c) $x^2 + 4x + 8$

d) $2x^2 - 7x + 3$

e) $-x^2 + 5x - 6$

f) $3x^2 - 12x + 12$

g) $4x^2 - 1$

h) $x^2 - 2x - 15$

Exercice 9 — Somme et produit des racines

On considère un trinôme $ax^2 + bx + c$ admettant deux racines x_1 et x_2 .

- Pour $f(x) = x^2 - 9x + 14$, calculer $x_1 + x_2$ et x_1x_2 , puis retrouver les racines.
- Pour $g(x) = 2x^2 - 11x + 5$, calculer $x_1 + x_2$ et x_1x_2 , puis vérifier avec le discriminant.
- Trouver deux nombres dont la somme vaut 8 et le produit vaut 15.

Exercice 10 — Racines et factorisation – Variante A

On considère les fonctions :

$$f(x) = x^2 - 5x + 6, \quad g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad h(x) = x^2 + 2x + 5.$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ et $h(x) = 0$ en utilisant le discriminant.
- Factoriser f , g et h lorsque cela est possible dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11 — Équation avec paramètre : une unique solution

On considère l'équation $(m + 8)x^2 + mx + 1 = 0$.

Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle une unique solution ?

III. Signe, inéquations**Exercice 12** — Tableaux de signe

Dresser le tableau de signe des trinômes suivants.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $g(x) = -x^2 + 4x + 5$

c) $h(x) = 2x^2 - 8x + 8$

d) $h(x) = 2x^2 - 8x + 8$

e) $p(x) = x^2 + 2x + 5$

f) $q(x) = -3x^2 + 6x - 3$

-

Exercice 13 — Résoudre des inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

b) $x^2 - 5x + 6 < 0$

c) $-x^2 + 4x + 5 \geq 4$

d) $2x^2 - 8x + 8 \leq 8$

e) $(x + 1)(x + 2) > 5x + 5$

f) $x^2 - 9 \leq 0$

g) $(x + 2)^2 \geq 36$

h) $(x + 2)^2 < 2(x^2 + 4)$

Exercice 14 — Inéquation rationnelle

Résoudre $\frac{2t}{1-t} > \frac{t+2}{t}$, en étudiant le signe de $\frac{2t}{1-t} - \frac{t+2}{t}$.

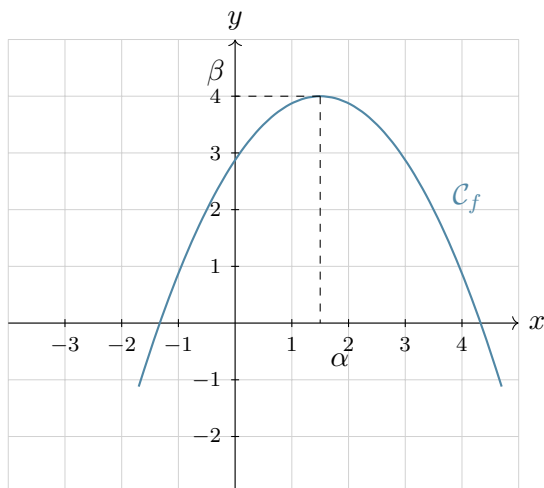
IV. Lecture graphique et recherche d'une expression

Exercice 15 — Déterminer une forme factorisée

Soit f une fonction polynôme de degré 2. Les racines de f sont -3 et 2 . De plus, on sait que $f(1) = 5$. Déterminer la forme factorisée de f .

Exercice 16 — Lecture graphique

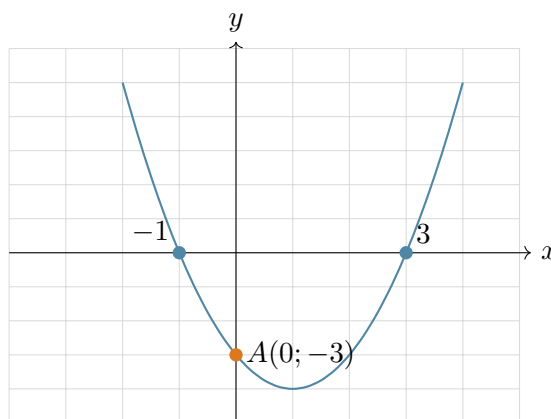
On considère une parabole représentant une fonction f du second degré.



- Donner une valeur approchée des coordonnées du sommet.
- La fonction admet-elle un maximum ou un minimum ?
- Donner les intervalles de variation de f .
- Donner une valeur approchée des solutions de $f(x) = 0$.
- Donner une valeur approchée de l'ensemble des solutions de $f(x) \geq 0$.

Exercice 17 — Retrouver une expression à partir d'un graphique

On considère la parabole représentée ci-dessous. Elle est la courbe d'une fonction polynôme du second degré f .



On sait que les racines de f sont visibles sur le graphique et que le point $A(0; -3)$ appartient à la courbe.

- Lire les racines de f sur le graphique.
- En déduire que $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$, où a est un réel.
- Utiliser les coordonnées du point A pour déterminer a .
- Donner l'expression développée de $f(x)$.
- Vérifier graphiquement le signe de f sur les différents intervalles.

V. Modéliser et optimiser

Exercice 18 — Produit maximal de deux nombres – Somme 10

On choisit deux nombres positifs ou nuls dont la somme est égale à **10**. Le score obtenu est le **produit** de ces deux nombres.

Le but est d'obtenir le plus grand score possible.

- Si le premier nombre est 3, quel est le deuxième ? Quel est le score obtenu ?
- Tester deux autres couples de nombres dont la somme vaut 10. Quel est le meilleur score obtenu ?
- On note x le premier nombre.
 - Quelles valeurs peut prendre x ?
 - Exprimer le deuxième nombre en fonction de x .
 - En déduire une expression du score $S(x)$.
- Développer $S(x)$, puis l'écrire sous forme canonique.
- À l'aide de cette forme canonique, déterminer les deux nombres qui donnent le **score maximal**. Quel est ce score ?

Exercice 19 — Aire maximale

On dispose de 40 mètres de clôture pour construire un enclos rectangulaire. On note x la largeur de l'enclos, en mètres.

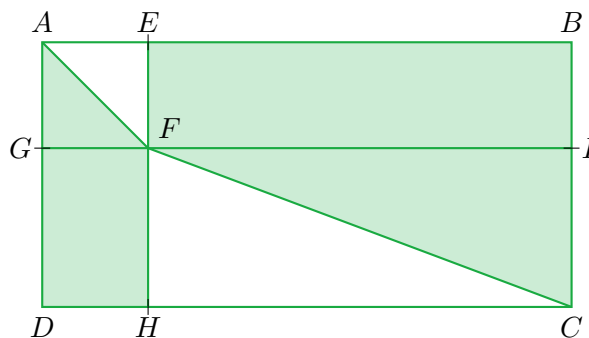
- Exprimer la longueur de l'enclos en fonction de x .
- Montrer que l'aire de l'enclos est donnée par :

$$A(x) = x(20 - x).$$

- Développer $A(x)$, puis déterminer sa forme canonique.
- Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ?
- Quelle est l'aire maximale ?

Exercice 20 — Aire minimale dans un rectangle

Soit $ABCD$ un rectangle de côtés 10 cm et 5 cm. $AEFG$ est un carré de côté x et $FICH$ est un rectangle. On note $f(x)$ l'aire de la partie blanche.



- Quelles valeurs peut prendre x ?
- Montrer que $f(x) = x^2 - \frac{15}{2}x + 25$.
- Étudier les variations de f .
- En déduire pour quelle valeur de x l'aire blanche est minimale.

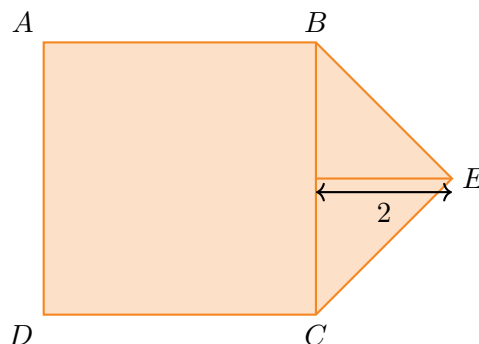
e) Pour quelle valeur de x l'aire blanche est-elle égale :

- a) à la moitié de l'aire du rectangle $ABCD$?
- b) au quart de l'aire du rectangle $ABCD$?

Exercice 21 — Aire d'un carré et d'un triangle

Soit $ABCD$ un carré de côté x cm et BEC un triangle isocèle en E de hauteur 2 cm.

On note $A(x)$ l'aire du polygone $ABECD$ en cm^2 .



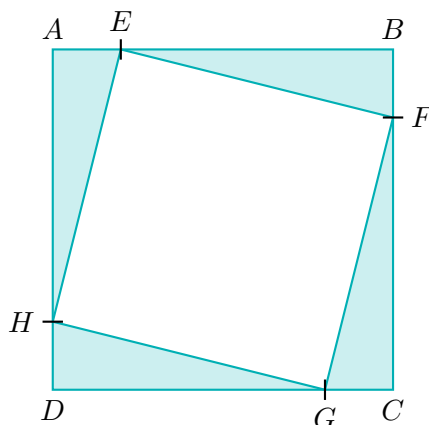
1. Quelles valeurs peut prendre x ?
2. Déterminer l'expression de $A(x)$ en fonction de x .
3. Quelle est la valeur de $A(x)$ si x est égal à 5 ?
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $A(x) = 24,75$?

Exercice 22 — Aire d'un carré inscrit

Soit $ABCD$ un carré de côté 5 cm. E , F , G et H sont des points appartenant aux côtés du carré, tels que

$$AE = BF = CG = DH = x.$$

On admet que $EFGH$ est un carré.



1. Quelle est l'aire du quadrilatère $EFGH$?
2. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle minimale ? Quelle est la valeur de l'aire minimale ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle égale à $14,12 \text{ cm}^2$?
4. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle inférieure ou égale à 13 cm^2 ?

Exercice 93 – [Chercher.]

Marie-Lou et Charlotte veulent fabriquer une boîte à bijoux cylindrique pour la fête des mères. Elles disposent d'un ruban d'une longueur de 1,10 m avec lequel elles veulent entourer la boîte pour l'offrir. Elles auront besoin de 50 cm pour faire le nœud. Elles aimeraient en outre que la boîte ait la plus grande aire latérale possible pour la décorer d'un dessin.

On considère uniquement l'aire latérale A du cylindre sans fond ni couvercle et, dans ce cas, $A = 2\pi r \times h$.

Déterminer le rayon et la hauteur de la boîte vérifiant ces conditions.

Exercice 23 — Placement à taux variable

Le 1^{er} janvier 2017, Diane place 5 000 euros sur un compte rémunéré à $t\%$ la première année et $(t - 0,5)\%$ la deuxième année.

Le 1^{er} janvier 2019, elle a 5 176,5 euros sur son compte.

Déterminer la valeur de t .

Exercice 24 — Modélisation : recette d'un spectacle

Une association organise un spectacle. Lorsque le billet coûte 10 euros, elle prévoit de vendre 200 billets. Elle estime que chaque baisse de 1 euro du prix permet de vendre 40 billets supplémentaires. La salle dispose de 600 places.

On note x le nombre entier d'euros de réduction, avec $0 \leq x \leq 10$.

- Exprimer en fonction de x le prix d'un billet et le nombre de billets vendus selon ce modèle.
- Montrer que la recette, en euros, est donnée par $R(x) = -40x^2 + 200x + 2000$.
- Mettre $R(x)$ sous forme canonique.
- À l'aide de cette forme, déterminer la ou les valeurs entières de x qui rendent la recette maximale.
- En déduire le ou les prix à proposer et la recette maximale correspondante.

Exercice 25 — Modélisation : deux cadres carrés

Un artisan utilise une baguette de 40 décimètres pour fabriquer deux cadres carrés, sans perte ni chute. On note x le côté du premier carré, en décimètres, avec $0 < x < 10$.

Il souhaite minimiser l'aire totale de verre nécessaire pour remplir les deux cadres. On néglige l'épaisseur de la baguette.

- Exprimer la longueur de baguette utilisée pour le premier cadre, puis montrer que le côté du second carré est $10 - x$.
- Exprimer l'aire totale $A(x)$ de verre, en décimètres carrés, puis montrer que $A(x) = 2x^2 - 20x + 100$.
- Déterminer la forme canonique de $A(x)$.
- En utilisant le signe d'un carré, justifier que cette aire admet un minimum et déterminer sa valeur.
- Quelles dimensions l'artisan doit-il choisir pour chacun des deux cadres ?

Exercice 26 — Lancer d'une balle

La hauteur, en mètres, d'une balle après t secondes est modélisée par :

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1.$$

- Quelle est la hauteur initiale de la balle ?
- Déterminer la forme canonique de $h(t)$.
- En déduire la hauteur maximale atteinte par la balle et l'instant où elle est atteinte.
- Résoudre $h(t) = 0$.
- Interpréter la solution positive dans le contexte.

Exercice 27 — Bénéfice d'une entreprise

Une entreprise fabrique et vend un produit. Le bénéfice, en euros, réalisé pour x centaines d'objets vendus est modélisé par :

$$B(x) = -2x^2 + 24x - 40.$$

- a) Calculer $B(0)$ et interpréter le résultat.
- b) Résoudre $B(x) = 0$.
- c) Dresser le tableau de signe de $B(x)$.
- d) Pour quelles quantités l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice positif ?
- e) Déterminer le bénéfice maximal et la quantité correspondante.

Exercice 28 — Arche parabolique

Une arche a la forme d'une parabole. Dans un repère, le sol correspond à l'axe des abscisses. L'arche touche le sol aux points d'abscisses 0 et 12, et sa hauteur maximale est 9 mètres.

- a) Expliquer pourquoi l'abscisse du sommet est 6.
- b) On modélise la hauteur de l'arche par $f(x) = a(x - 6)^2 + 9$. Déterminer a .
- c) Donner l'expression de $f(x)$.
- d) Calculer la hauteur de l'arche à 2 mètres du bord gauche.
- e) À quelles distances du bord gauche la hauteur de l'arche est-elle supérieure ou égale à 5 mètres ?

IX. Approfondissement : degrés trois et quatre**Exercice 29** — Équation de degré trois guidée

On considère le polynôme

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4.$$

- a) Vérifier que $P(1) = 0$. Que peut-on en déduire ?
- b) Écrire $P(x)$ sous la forme

$$P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c),$$

puis déterminer les valeurs de a , b et c en développant.

- c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
- d) Dresser le tableau de signe de $P(x)$.

Exercice 30 — Équation de degré quatre

On considère l'équation

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

- a) Poser $X = x^2$ et transformer l'équation en une équation du second degré en X .
- b) Résoudre cette équation en X .
- c) En déduire les solutions réelles de l'équation initiale.
- d) Factoriser $x^4 - 5x^2 + 4$ dans $\mathbb{R}$.