

1. Fonctions polynômes du second degré

1.1 Forme développée

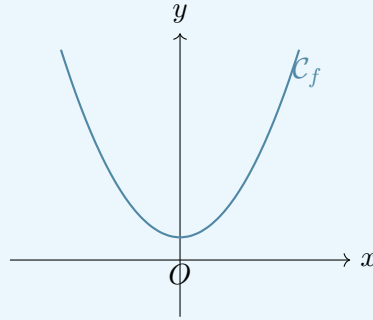
Définition

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme du second degré** s'il existe trois réels a , b et c , avec $a \neq 0$, tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Cette écriture est appelée la **forme développée** de f .

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole**.



Exemple

$f(x) = 2x^2 - 3x + 0,2$ est une fonction polynôme du second degré avec :

$$a = 2, \quad b = -3, \quad c = 0,2.$$

1.2 Forme canonique

Propriété

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
Il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Cette écriture est appelée la **forme canonique** de f .

On a :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

En notant $\Delta = b^2 - 4ac$, formule que nous verrons très vite, on peut aussi écrire :

$$\beta = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Méthode

Pour déterminer la forme canonique de $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- on calcule $\alpha = -\frac{b}{2a}$;
- on calcule $\beta = f(\alpha)$ ou $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$;
- on écrit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Exemple

Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$.

$$\alpha = -\frac{-8}{2 \times 2} = 2.$$

$$\beta = f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 3 = 8 - 16 + 3 = -5.$$

Donc :

$$f(x) = 2(x - 2)^2 - 5.$$

1.3 Sens de variation et extremum

Propriété

Soit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ une fonction polynôme du second degré.

- Si $a > 0$, alors f admet un **minimum** égal à β , atteint pour $x = \alpha$.
- Si $a < 0$, alors f admet un **maximum** égal à β , atteint pour $x = \alpha$.

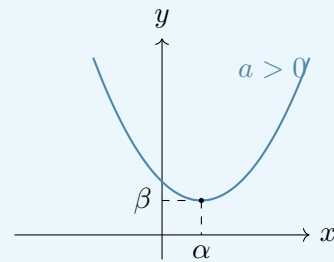
Propriété

Si $a > 0$, alors f est décroissante sur $] -\infty; \alpha]$ puis croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Si $a < 0$, alors f est croissante sur $] -\infty; \alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

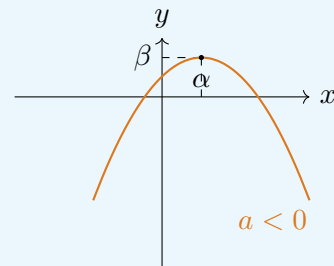
Cas $a > 0$ (*Pensez aux sourires !*)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		β	



Cas $a < 0$ (*Pensez à la cave !*)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		β	

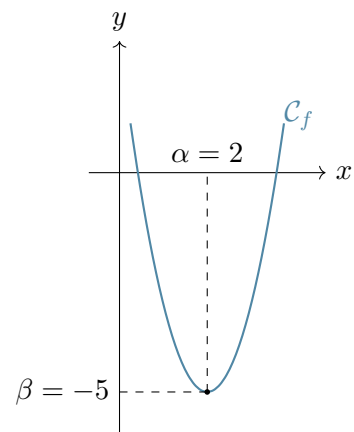


Exemple

Soit $f(x) = 2(x - 2)^2 - 5$.

Comme $a = 2 > 0$, la fonction admet un minimum égal à -5 , atteint pour $x = 2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		-5	



2. Équations du second degré

2.1 Équation du second degré

Définition

Une équation du second degré est une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

où a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Lorsqu'elles existent, les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées les **racines** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

2.2 Discriminant

Définition

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.

Le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

est appelé le **discriminant** du trinôme.

Propriété

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, et soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

— Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution réelle.

Méthode

Pour résoudre une équation du second degré :

- on identifie a , b et c ;
- on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$;
- on applique le cas correspondant au signe de Δ .

Exemples

Équation	Discriminant	Cas	Solutions
$2x^2 - 5x + 2 = 0$	$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9$	$\Delta > 0$	$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 2$
$x^2 - 6x + 9 = 0$	$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$	$\Delta = 0$	$x_0 = 3$
$x^2 + 2x + 5 = 0$	$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16$	$\Delta < 0$	Aucune solution réelle

3. Factorisation d'un trinôme du second degré

3.1 Forme factorisée

Propriété

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré, avec $a \neq 0$, et soit Δ son discriminant.

— Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 et :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

— Si $\Delta = 0$, alors f admet une racine double x_0 et :

$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$

— Si $\Delta < 0$, alors f ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$ sous forme d'un produit de polynômes du premier degré.

Exemples

On a vu que $2x^2 - 5x + 2$ admet les racines $\frac{1}{2}$ et 2. Donc :

$$2x^2 - 5x + 2 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 2).$$

On a aussi :

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2.$$

3.2 Somme et produit des racines

Propriété

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré avec $\Delta > 0$.

Si x_1 et x_2 sont les deux racines de f , alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Exemple

Pour $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$, les racines sont $\frac{1}{2}$ et 2.

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} = -\frac{-5}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \times 2 = 1 = \frac{2}{2}.$$

4. Signe d'un trinôme du second degré

Propriété

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré, avec $a \neq 0$, et soit Δ son discriminant.

Cas $\Delta > 0$: deux racines distinctes $x_1 < x_2$

$a > 0$					
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

$a < 0$					
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Cas $\Delta = 0$: une racine double x_0

$a > 0$			
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

$a < 0$			
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

Cas $\Delta < 0$: aucune racine réelle

$a > 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

$a < 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-	

Méthode

Pour étudier le signe d'un trinôme :

- on calcule le discriminant ;
- on détermine les racines si elles existent ;
- on utilise le signe de a pour compléter le tableau de signe.

Exemple

Étudier le signe de $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

On a $\Delta = 9$, donc les racines sont $\frac{1}{2}$ et 2.

Comme $a = 2 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi :

$$2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \iff x \in \left[\frac{1}{2}; 2 \right].$$