

1 Rappels : qu'est-ce qu'une fonction ?

1.1 Relier deux grandeurs

Une location de vélo coûte 5 euros de frais fixes, puis 2 euros par heure. Pour une durée x comprise entre 0 et 8 heures, le prix est :

$$f(x) = 2x + 5, \quad x \in [0; 8].$$

Ainsi $f(3) = 11$: une location de 3 heures coûte 11 euros.

Définition

Une **fonction** f associe à chaque nombre x de son **ensemble de définition** un unique nombre $f(x)$, appelé **image de x** .

Si $f(a) = b$, alors b est l'image de a , et a est un **antécédent de b** .

Dans l'exemple, 3 est un antécédent de 11 et 11 est l'image de 3. La notation $f(3)$ se lit « f de 3 » : ce n'est pas $f \times 3$.

1.2 Calculer une image avec une formule

Méthode

Pour calculer l'image de a , remplacer **chaque** x par a , puis effectuer les calculs.

Pour $g(x) = x^2 - 2x + 1$, définie sur $\mathbb{R}$:

$$g(3) = 3^2 - 2 \times 3 + 1 = 4,$$

$$g(-2) = (-2)^2 - 2 \times (-2) + 1 = 4 + 4 + 1 = 9.$$

1.3 Chercher un antécédent avec une formule

Méthode

Chercher les antécédents de b revient à **résoudre l'équation** $f(x) = b$. On conserve seulement les solutions appartenant à l'ensemble de définition.

Pour la location de vélo, chercher l'antécédent de 15 revient à résoudre :

$$2x + 5 = 15 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = 10 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5.$$

Le prix est donc de 15 euros pour une location de 5 heures.

Ne pas confondre

Image : on connaît x , on calcule $f(x)$. **Antécédent** : on connaît $f(x)$, on cherche x .

Pour $q(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$, 4 a deux antécédents : -2 et 2 ; 0 en a un seul ; -1 n'en a aucun. Chaque nombre de l'ensemble de définition possède pourtant une seule image.

2 Rappels : tableaux et courbes

2.1 Lire un tableau de valeurs

Voici quelques valeurs de la fonction $q(x) = \frac{x^2}{2}$ définie sur $[-3; 3]$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$q(x)$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

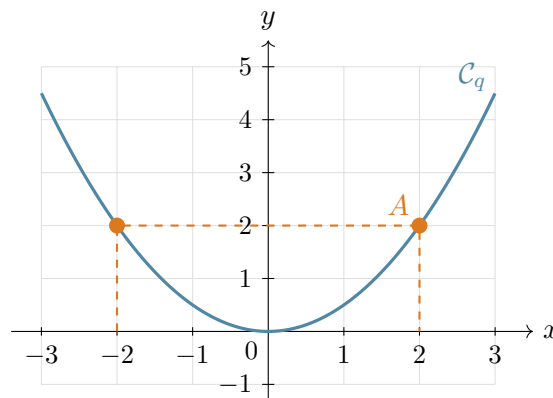
L'image de -2 est 2. Les nombres -2 et 2 sont des antécédents de 2. **Un tableau ne donne que les valeurs affichées** : sans autre information, il ne permet pas de connaître toutes les images ni tous les antécédents.

2.2 Relier une courbe et une formule

Définition

La courbe représentative de q , notée $\mathcal{C}_q$, est l'ensemble des points de coordonnées $(x; q(x))$. Un point $A(a; b)$ appartient à cette courbe si et seulement si $b = q(a)$.

Par exemple, $A(2; 2)$ appartient à $\mathcal{C}_q$ car $q(2) = 2$. Le point $B(2; 3)$ n'y appartient pas, car $q(2) \neq 3$.



Méthode

Lire une image : partir de l'abscisse, rejoindre la courbe verticalement, puis lire l'ordonnée horizontalement.

Lire les antécédents : partir de l'ordonnée, repérer toutes les intersections avec la courbe à cette hauteur, puis lire leurs abscisses.

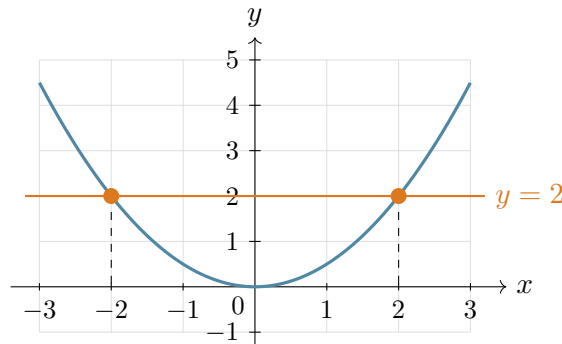
Sur le graphique, on lit $q(-2) = 2$. La droite horizontale de hauteur 2 rencontre la courbe en deux points : les antécédents de 2 sont -2 et 2 .

Une lecture graphique peut être **approchée** : on utilise alors le symbole $\approx$.

3 Rappels : équations, inéquations et signe

3.1 Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

On reprend $q(x) = \frac{x^2}{2}$ sur $[-3; 3]$.



Méthode

- $q(x) = k$: lire les abscisses des intersections avec la droite $y = k$.
- $q(x) > k$: lire les abscisses où la courbe est **au-dessus** de $y = k$.
- $q(x) < k$: lire les abscisses où elle est **au-dessous** de $y = k$.

Avec $\leq$ ou $\geq$, les points d'intersection sont inclus. On respecte toujours l'ensemble de définition.

$$\begin{aligned} q(x) = 2 &: S = \{-2; 2\}, \\ q(x) < 2 &: S =]-2; 2[, \\ q(x) \leq 2 &: S = [-2; 2], \\ q(x) > 2 &: S = [-3; -2[\cup]2; 3]. \end{aligned}$$

Le symbole $\cup$ signifie « union » : on rassemble deux intervalles. Les bornes -3 et 3 sont incluses ici, car $q(-3) = q(3) = 4,5 > 2$.

3.2 Étudier le signe d'une fonction

Définition

Étudier le **signe** de f , c'est déterminer où $f(x)$ est positif, nul ou négatif. On compare sa courbe à l'**axe des abscisses**, d'équation $y = 0$.

Pour $p(x) = x - 2$ sur $\mathbb{R}$: $p(x) < 0$ si $x < 2$, $p(2) = 0$ et $p(x) > 0$ si $x > 2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$p(x)$	$-$	0	$+$

4 Rappels : variations et extremums

4.1 Décrire les variations

On lit une courbe **de gauche à droite**, lorsque x augmente.

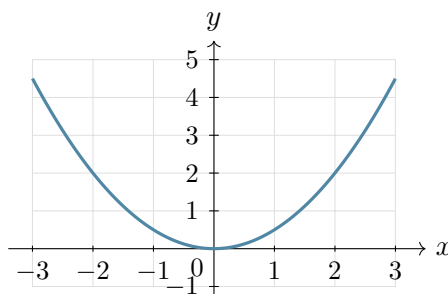
Définition

Sur un intervalle, une fonction est :

- **croissante** si les images augmentent ou restent égales ;
- **décroissante** si les images diminuent ou restent égales ;
- **constante** si les images restent toutes identiques.

Autrement dit, pour tous $a < b$ dans cet intervalle : $f(a) \leq f(b)$ si f est croissante, et $f(a) \geq f(b)$ si elle est décroissante.

Pour $q(x) = \frac{x^2}{2}$ sur $[-3; 3]$, la courbe descend jusqu'à $x = 0$, puis remonte.



x	-3	0	3
$q(x)$	4,5	0	4,5

q est décroissante sur $[-3; 0]$, puis croissante sur $[0; 3]$.

4.2 Lire un minimum et un maximum

Définition

Le **minimum** est la plus petite valeur prise par la fonction sur l'ensemble étudié ; le **maximum** est la plus grande. Ce sont des **images**.

Ici, le minimum de q est 0, atteint pour $x = 0$. Son maximum est 4,5, atteint pour $x = -3$ et $x = 3$.

Signe et variations : deux questions différentes

Le **signe** dit si la courbe est au-dessus ou au-dessous de l'axe horizontal. Les **variations** disent si elle monte ou descend. Ainsi, sur $[-3; 0]$, q est **positive ou nulle et décroissante**.

5 Le taux de variation : une pente moyenne

5.1 Mesurer une variation moyenne

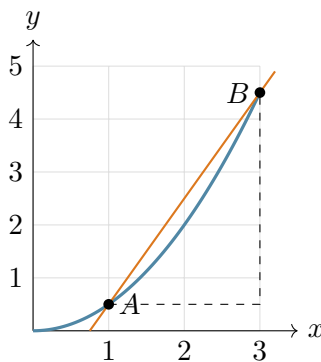
On peut mesurer la variation moyenne des images entre deux abscisses distinctes.

Définition

Le **taux de variation** de f entre deux nombres distincts a et b est :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Graphiquement, ce nombre représente la pente de la droite reliant $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$, appelée **sécante** à la courbe.



Pour $q(x) = \frac{x^2}{2}$, entre 1 et 3 :

$$q(1) = 0,5, \quad q(3) = 4,5,$$

$$\frac{q(3) - q(1)}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

La droite orange est la sécante. Elle est distincte de la courbe bleue.

5.2 Calculer et interpréter dans une situation

Un coût $C(x)$ est exprimé en euros, et x représente une quantité en kilogrammes. On sait que $C(2) = 14$ et $C(6) = 30$.

$$\frac{C(6) - C(2)}{6 - 2} = \frac{30 - 14}{4} = 4.$$

Entre 2 et 6 kg, le coût augmente **en moyenne de 4 euros par kilogramme**.

Méthode

Calculer les deux images, soustraire les images et les abscisses **dans le même ordre**, puis diviser. Préciser l'unité et le sens du résultat.

Deux distinctions à retenir

Taux de variation : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, une variation moyenne par unité de x .

Taux d'évolution : $\frac{V_f - V_i}{V_i}$ (si $V_i \neq 0$), souvent exprimé en pourcentage.

Un taux de variation positif entre deux points signifie que l'image finale est supérieure à l'image initiale. Il ne suffit pas à prouver que la fonction est croissante sur tout l'intervalle.