

1 Proportions et pourcentages

1.1 Proportion d'une sous-population

Définition

Une population contient N individus. Une sous-population contient n individus. La **proportion** de cette sous-population dans la population est

$$p = \frac{n}{N}.$$

Cette proportion peut s'écrire sous forme décimale ou sous forme de pourcentage.

Exemple

Calculer la proportion p

Dans une entreprise de 250 salariés, 145 utilisent les transports en commun. La proportion correspondante est

$$p = \frac{145}{250} = 0,58 = 58 \%.$$

Calculer l'effectif total N

Dans un lycée, les 280 élèves de première représentent 35 % de l'effectif total. Le nombre total d'élèves est

$$N = \frac{280}{0,35} = 800.$$

1.2 Calculer une partie à partir d'un pourcentage

Propriété

Prendre t % d'une quantité Q revient à multiplier Q par $\frac{t}{100}$:

$$\text{partie} = Q \times \frac{t}{100}.$$

Exemple Un magasin réalise un chiffre d'affaires mensuel de 84 000 euros. Les ventes en ligne représentent 35 % de ce montant. Elles s'élèvent à

$$84\,000 \times 0,35 = 29\,400 \text{ euros.}$$

1.3 Proportions échelonnées

Propriété

Pour calculer une proportion de proportion, on multiplie les deux proportions.

Ainsi, si A représente une proportion p de B et si B représente une proportion q de E , alors la proportion de A dans E est

$$p \times q.$$

Exemple Dans une chaîne de magasins, 40 % des salariés travaillent à temps partiel. Parmi eux, 65 % sont des femmes. La proportion de femmes travaillant à temps partiel parmi tous les salariés est

$$0,40 \times 0,65 = 0,26 = 26 \%.$$

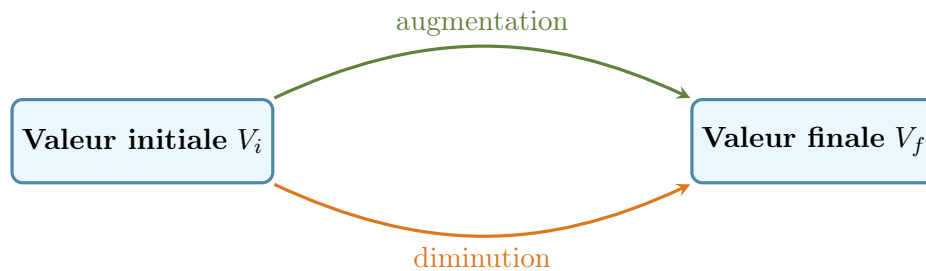
■ Remarque :

On n'additionne pas les pourcentages dans cette situation : on multiplie les proportions.

2 Évolution d'une grandeur

2.1 Variation absolue et variation relative

On considère une grandeur qui passe d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f .



Définition

La **variation absolue** est

$$V_f - V_i.$$

Elle s'exprime dans la même unité que la grandeur.

Définition

Le **taux d'évolution** est

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i}.$$

Il est souvent exprimé en pourcentage.

Exemple Le nombre de clients d'une enseigne passe de 1 250 à 1 400.

$$V_f - V_i = 1\,400 - 1\,250 = 150.$$

La variation absolue est de 150 clients. Le taux d'évolution est

$$t = \frac{1\,400 - 1\,250}{1\,250} = 0,12 = 12\%.$$

Le nombre de clients a donc augmenté de 12 %.

■ Remarque :

Une variation absolue ne suffit pas toujours pour comparer deux évolutions. Une hausse de 100 clients est importante pour une petite entreprise, mais peut être négligeable pour une grande enseigne. Le taux d'évolution tient compte de la valeur de départ.

2.2 Interpréter le signe d'un taux

- Si $t > 0$, la grandeur **augmente**.
- Si $t < 0$, la grandeur **diminue**.
- Si $t = 0$, la grandeur reste **stable**.

Exemple

Taux négatif

Un prix passe de 80 euros à 68 euros :

$$t = \frac{68 - 80}{80} = -0,15 = -15\%.$$

Le prix a diminué de 15 %.

Taux positif

Un salaire passe de 1 500 euros à 1 620 euros :

$$t = \frac{1\,620 - 1\,500}{1\,500} = 0,08 = 8\%.$$

Le salaire a augmenté de 8 %.

3 Coefficient multiplicateur

Définition

Pour passer de la valeur initiale V_i à la valeur finale V_f , on multiplie V_i par un nombre appelé **coefficient multiplicateur**, noté CM :

$$V_f = V_i \times CM.$$

Si le taux d'évolution est t , écrit sous forme décimale, alors

$$CM = 1 + t.$$

Exemple

Une hausse de 7 % correspond à

$$CM = 1 + 0,07 = 1,07.$$

On multiplie donc la valeur initiale par 1,07.

Une baisse de 7 % correspond à

$$CM = 1 - 0,07 = 0,93.$$

On multiplie donc la valeur initiale par 0,93.

3.1 Calculer une valeur finale

Méthode

- Convertir le pourcentage en taux décimal.
- Calculer le coefficient multiplicateur $1 + t$.
- Multiplier la valeur initiale par ce coefficient.

Exemple Le prix d'un produit est de 100 euros. Il augmente de 20 %.

$$V_f = 100 \times (1 + 0,20) = 100 \times 1,20 = 120.$$

Le nouveau prix est de 120 euros.

3.2 Calculer une valeur initiale

Propriété

Comme $V_f = V_i \times CM$, on obtient

$$V_i = \frac{V_f}{CM}.$$

Exemple Après une remise de 20 %, un article coûte 72 euros. Le coefficient multiplicateur est $1 - 0,20 = 0,80$. Le prix avant remise était donc

$$V_i = \frac{72}{0,80} = 90 \text{ euros.}$$

■ **Remarque** : Pour retrouver une valeur initiale, on **divise** par le coefficient multiplicateur. Il serait faux d'augmenter directement le prix soldé de 20 %.

4 Évolutions successives

Propriété

Lorsque plusieurs évolutions successives ont pour coefficients multiplicateurs $CM_1, CM_2, \dots, CM_n$, le coefficient multiplicateur global est

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times \dots \times CM_n.$$

Le taux global est alors $t_{\text{global}} = CM_{\text{global}} - 1$.

Méthode

Pour traiter deux évolutions successives :

- a traduire chaque évolution par son coefficient multiplicateur ;
- b multiplier chaque coefficients ;
- c soustraire 1 au coefficient global ;
- d convertir le résultat en pourcentage.

Exemple Un chiffre d'affaires augmente de 10 %, puis diminue de 4 %.

$$CM_{\text{global}} = 1,10 \times 0,96 = 1,056.$$

Ainsi,

$$t_{\text{global}} = 1,056 - 1 = 0,056 = 5,6 \, \%.$$

Sur l'ensemble de la période, le chiffre d'affaires a augmenté de 5,6 %.

■ **Remarque :** En général, on ne peut pas additionner les taux d'évolutions successives. Une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 10 % ne ramène pas à la valeur initiale : $1,10 \times 0,90 = 0,99$.

L'évolution globale est donc une baisse de 1 %.

5 Évolution réciproque

Définition

L'**évolution réciproque** est celle qui permet de revenir de la valeur finale à la valeur initiale.

Propriété

Si une évolution a pour coefficient multiplicateur CM , alors l'évolution réciproque a pour coefficient

$$CM' = \frac{1}{CM}.$$

Son taux est $t' = CM' - 1$.

Exemple Après une hausse de 25 %, le coefficient multiplicateur est 1,25. Pour revenir à la valeur initiale, il faut appliquer le coefficient

$$CM' = \frac{1}{1,25} = 0,80.$$

Le taux réciproque est $0,80 - 1 = -0,20$, soit une baisse de 20 %.

■ **Remarque :** Le taux réciproque n'est pas, en général, l'opposé du taux initial. Une hausse de 25 % est annulée par une baisse de 20 %, et non par une baisse de 25 %.