

I. Fonctions affines

Définition

Une **fonction affine** est une fonction qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels.

- m est le **coefficient directeur**.
- p est l'**ordonnée à l'origine**.

Propriété

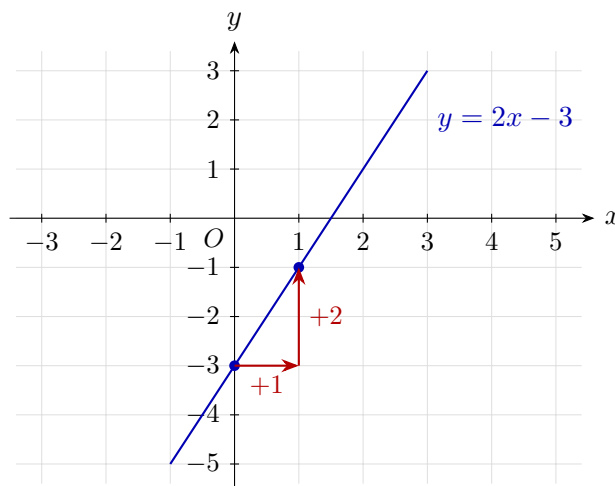
La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

Dans l'expression $f(x) = mx + p$:

- $p = f(0)$ est l'ordonnée du point où la droite coupe l'axe des ordonnées ;
- m est le taux d'accroissement : lorsque x augmente de 1, l'image augmente de m .

Exemple

Pour $f(x) = 2x - 3$, on a $m = 2$ et $p = -3$. La droite passe par le point $(0; -3)$ et, quand on avance de 1 vers la droite, on monte de 2.



Méthode

Pour déterminer graphiquement l'expression d'une fonction affine :

- a) lire l'ordonnée à l'origine p , c'est-à-dire l'ordonnée du point où la droite coupe l'axe des ordonnées ;
- b) lire le coefficient directeur m à l'aide d'un déplacement entre deux points de la droite :

$$m = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}};$$

Méthode

Pour déterminer par le calcul l'expression d'une fonction affine dont on connaît deux images $f(a)$ et $f(b)$, avec $a \neq b$:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On utilise une des deux images pour trouver p .

Exemple graphique

Sur le schéma précédent, la droite coupe l'axe des ordonnées en $(0; -3)$. Donc $p = -3$.

Ensuite, en partant du point $(0; -3)$, on avance de 1 vers la droite et on monte de 2 pour retrouver un autre point de la droite.

Donc :

$$m = \frac{2}{1} = 2.$$

Ainsi, l'expression de la fonction affine représentée est : $f(x) = 2x - 3$.

Exemple par le calcul

On cherche une fonction affine $f(x) = mx + p$ telle que $f(1) = 2$ et $f(4) = 11$.

$$m = \frac{11 - 2}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3.$$

Donc $f(x) = 3x + p$. Comme $f(1) = 2$, on obtient : $3 \times 1 + p = 2$, $p = -1$.
Ainsi, $f(x) = 3x - 1$.

II. Variations d'une fonction affine

Propriété

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exemples

$$f(x) = 2x - 3$$

Comme $m = 2 > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

$$g(x) = -3x + 6$$

Comme $m = -3 < 0$, g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	↘	

III. Signe d'une fonction affine

Propriété

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine avec $m \neq 0$.
La fonction f s'annule pour :

$$x_0 = -\frac{p}{m}.$$

Le signe de $f(x)$ change en x_0 .

- Si $m > 0$, alors $f(x) < 0$ avant x_0 et $f(x) > 0$ après x_0 .
- Si $m < 0$, alors $f(x) > 0$ avant x_0 et $f(x) < 0$ après x_0 .

Méthode

Pour étudier le signe d'une fonction affine $f(x) = mx + p$:

- a) résoudre $mx + p = 0$;
- b) placer la valeur trouvée dans un tableau de signes ;
- c) utiliser le signe de m pour compléter le tableau.

Exemple 1

Étudions le signe de $f(x) = 2x - 6$.

$$2x - 6 = 0 \iff x = 3.$$

Comme le coefficient directeur 2 est positif :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2x - 6$	-	0	+

Donc :

$$2x - 6 < 0 \text{ sur }]-\infty; 3[$$

$$2x - 6 > 0 \text{ sur }]3; +\infty[.$$

Exemple 2

Étudions le signe de $g(x) = -3x + 12$.

$$-3x + 12 = 0 \iff x = 4.$$

Comme le coefficient directeur -3 est négatif :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$-3x + 12$	+	0	-

Donc :

$$-3x + 12 > 0 \text{ sur }]-\infty; 4[$$

$$-3x + 12 < 0 \text{ sur }]4; +\infty[.$$

IV. Produits et quotients de fonctions affines

Méthode

Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient :

- chercher les valeurs qui annulent chaque facteur ;
- pour un quotient, exclure les valeurs qui annulent le dénominateur ;
- dresser le tableau de signes de chaque facteur ;
- multiplier les signes ligne par ligne.

Exemple : produit

On veut résoudre :

$$(2x - 6)(-x - 1) > 0.$$

Les facteurs s'annulent pour :

$$2x - 6 = 0 \iff x = 3, \quad -x - 1 = 0 \iff x = -1.$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$2x - 6$	$-$	0	$-$	$+$	
$-x - 1$	$+$	0	$-$	$-$	
$(2x - 6)(-x - 1)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Le produit est strictement positif sur $] -1; 3[$.

Exemple : quotient

On veut résoudre :

$$\frac{x - 2}{-3x + 9} \leq 0.$$

Le numérateur s'annule pour $x = 2$. Le dénominateur s'annule pour $x = 3$, donc 3 est une valeur interdite. L'ensemble de définition est :

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x - 2$	-	0	+	+
$-3x + 9$	+	+	0	-
$\frac{x - 2}{-3x + 9}$	-	0	+	-

Comme on cherche les valeurs pour lesquelles le quotient est négatif ou nul, les solutions sont :

$$]-\infty; 2] \cup]3; +\infty[.$$

■ **Attention** : Dans un quotient, une valeur qui annule le dénominateur n'est jamais solution, même si le tableau de signes indique un changement de signe à cet endroit.