

1. Calcul numérique sans calculatrice

1.1 Priorités opératoires

Propriété

Dans un calcul, on respecte l'ordre suivant :

- a) les calculs entre parenthèses ;
- b) les puissances et les racines carrées ;
- c) les multiplications et les divisions, de gauche à droite ;
- d) les additions et les soustractions, de gauche à droite.

Méthode

On peut rendre un calcul plus simple en le découpant en étapes.

Exemple

$$3 + 2 \times (7 - 4)^2 = 3 + 2 \times 3^2 = 3 + 2 \times 9 = 21.$$

1.2 Calculer avec des fractions

Propriété

Soient a , b , c et d des nombres avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$.
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
- $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$, avec $c \neq 0$.

Méthode

Pour additionner ou soustraire deux fractions, on choisit un dénominateur commun, puis on simplifie si possible.

Exemples

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}.$$

Méthode

Pour multiplier des fractions, on simplifie avant de multiplier lorsque c'est possible.

Exemple

$$\frac{14}{15} \times \frac{25}{21} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} \times \frac{5 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{9}.$$

Méthode

Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Exemple

$$\frac{2}{5} \div \frac{4}{15} = \frac{2}{5} \times \frac{15}{4} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}.$$

1.3 Signes et nombres relatifs

Propriété

- Le produit de deux nombres de même signe est positif.
- Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.
- Les mêmes règles s'appliquent aux quotients.

Exemples

$$(-3) \times (-5) = 15, \quad (-24) \div 6 = -4, \quad -7 + 12 = 5.$$

1.4 Puissances

Définition

Pour tout entier $n \geq 1$, a^n désigne le produit de n facteurs égaux à a .

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

Propriété

Soit a un nombre non nul, et soient m et n deux entiers.

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- $(a^m)^n = a^{mn}$.
- $a^0 = 1$.
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemples

$$2^3 \times 2^5 = 2^8 = 256, \quad \frac{3^7}{3^4} = 3^3 = 27, \quad 5^{-2} = \frac{1}{25}.$$

1.5 Racines carrées

Définition

Pour tout nombre $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a .

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Propriété

Pour tous nombres $a \geq 0$ et $b > 0$:

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Méthode

Pour simplifier une racine carrée, on fait apparaître le plus grand carré parfait possible.

Exemples

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}.$$

2. Calcul littéral

2.1 Expressions littérales

Définition

Une expression littérale est une expression qui contient une ou plusieurs lettres. Ces lettres représentent des nombres.

Exemples

$3x + 5$, $2a^2 - 4a + 1$, $(x + 1)(x - 3)$.

Méthode

Pour calculer la valeur d'une expression littérale, on remplace la lettre par la valeur donnée, puis on respecte les priorités opératoires.

Exemple Pour $A = 2x^2 - 3x + 1$ et $x = -2$:

$$A = 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15.$$

2.2 Réduire une expression

Définition

Réduire une expression, c'est regrouper les termes de même nature.

Méthode

On regroupe les constantes avec les constantes, les termes en x avec les termes en x , les termes en x^2 avec les termes en x^2 , etc.

Exemples

$$4x + 7 - 2x + 5 = 2x + 12.$$

$$3x^2 - 5x + 2 + x^2 + 9x - 8 = 4x^2 + 4x - 6.$$

Remarque

On ne peut pas regrouper des termes de natures différentes : $3x + 2x^2$ ne se réduit pas en $5x^2$.

2.3 Développer

Définition

Développer une expression, c'est transformer un produit en somme.

Propriété

- Distributivité simple : $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$.
- Double distributivité : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Exemples

$$5(2x - 3) = 10x - 15.$$

$$(x + 4)(2x - 1) = 2x^2 - x + 8x - 4 = 2x^2 + 7x - 4.$$

2.4 Identités remarquables

Propriété

Pour tous nombres a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

■ **Remarque** On peut utiliser ces identités remarquables pour développer ou factoriser une expression.

Exemples

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

$$(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25.$$

$$(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49.$$

2.5 Factoriser

Définition

Factoriser une expression, c'est transformer une somme en produit.

Propriété

- $ka + kb = k(a + b)$.
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Méthode

Pour factoriser, on cherche d'abord un facteur commun.

On peut aussi reconnaître une différence de deux carrés : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Exemples

- $6x^2 - 9x = 3x(2x - 3)$.
- $(x + 1)(2x - 5) + 4(x + 1) = (x + 1)((2x - 5) + 4) = (x + 1)(2x - 1)$.
- $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5)$.

2.6 Quotients littéraux

Méthode

Pour additionner ou soustraire des quotients littéraux, on les met sous le même dénominateur.

Ensuite, on additionne ou on soustrait les numérateurs, puis on simplifie le quotient si c'est possible.

Exemples

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{4}{2x} + \frac{3}{2x} = \frac{7}{2x}.$$

$$\frac{5}{x} - \frac{1}{3x} = \frac{15}{3x} - \frac{1}{3x} = \frac{14}{3x}.$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{2x}{x(x+1)} = \frac{3x+1}{x(x+1)}.$$

$$\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{3x}{x(x-2)} - \frac{x-2}{x(x-2)} = \frac{2x+2}{x(x-2)}.$$