

I. Vecteur directeur d'une droite

Définition

Un **vecteur directeur** d'une droite est un vecteur non nul qui donne la direction de cette droite.
Si A et B sont deux points distincts d'une droite d , alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d .

Propriété

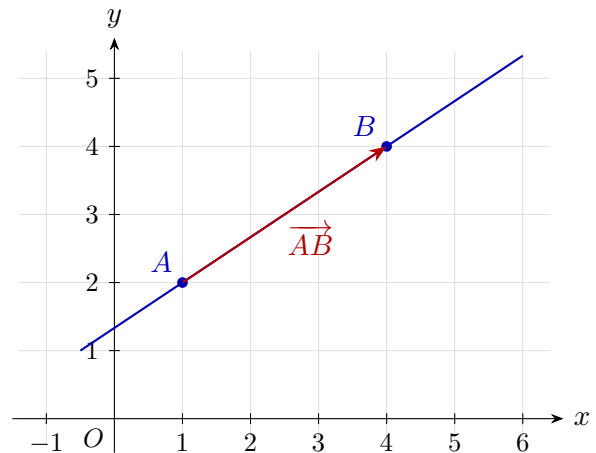
Deux droites sont **parallèles** si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Exemple

Soient $A(1; 2)$ et $B(4; 4)$.

Alors : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .



II. Équations de droites

1. Équation cartésienne

Définition

Une **équation cartésienne** de droite est une équation de la forme :

$$ax + by + c = 0,$$

où a , b et c sont des nombres réels, avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

Propriété

La droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet pour vecteur directeur :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

■ Remarque

Une droite possède une infinité d'équations cartésiennes. Si l'on multiplie tous les coefficients d'une équation cartésienne par un même nombre non nul, on obtient une nouvelle équation qui représente la même droite.

Exemple

La droite d d'équation $2x - 3y + 6 = 0$ admet pour vecteur directeur : $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

En effet, ici $a = 2$ et $b = -3$, donc $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Équation réduite

Définition

Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une **équation réduite** de la forme :

$$y = mx + p.$$

Le nombre m est la **pente** ou le **coefficient directeur** de la droite. Le nombre p est l'**ordonnée à l'origine**.

Propriété

Une droite d'équation réduite $y = mx + p$ admet pour vecteur directeur :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

Si $m = \frac{a}{b}$, avec $b \neq 0$, alors $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur.

Exemple

La droite d'équation $y = -2x + 5$ a pour pente $m = -2$ et pour ordonnée à l'origine $p = 5$. Un vecteur directeur est :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

■ **Cas particulier** : Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'a pas d'équation réduite de la forme $y = mx + p$. Elle admet une équation du type :

$$x = k.$$

III. Déterminer une équation de droite

1. Avec deux points (*Comme avec les fonctions affines*)

Méthode

Pour déterminer une équation de la droite passant par deux points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

- calculer un vecteur directeur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$;
- si $x_A \neq x_B$, calculer la pente $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$;
- écrire $y = mx + p$ puis utiliser un des deux points pour trouver p ;

Exemple

Soient $A(1; 4)$ et $B(5; 2)$. La pente de la droite (AB) est :

$$m = \frac{2 - 4}{5 - 1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Donc son équation réduite est $y = -\frac{1}{2}x + p$. Comme $A(1; 4)$ appartient à la droite :

$$4 = -\frac{1}{2} \times 1 + p, \quad p = \frac{9}{2}.$$

Ainsi :

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}.$$

Méthode

Pour déterminer une équation cartésienne d'une droite passant par deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

- a) Calculer un vecteur directeur :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

- b) Remplacer ses coordonnées dans la forme

$$(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + c = 0.$$

- c) Remplacer les coordonnées d'un des deux points dans l'équation afin de déterminer la constante c .

Exemple

Soient $A(1; 2)$ et $B(4; 5)$.

Un vecteur directeur de AB est : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Donc on peut écrire : $3x - 3y + c = 0$.

On utilise le point $A(1; 2)$:

$$3 \times 1 - 3 \times 2 + c = 0$$

$$3 - 6 + c = 0$$

$$c = 3.$$

On obtient donc

$$3x - 3y + 3 = 0.$$

2. Avec un point et une pente**Méthode**

Pour déterminer l'équation d'une droite passant par un point $A(x_A; y_A)$ et ayant pour pente m :

- écrire $y = mx + p$;
- remplacer x et y par les coordonnées de A ;
- résoudre l'équation obtenue pour trouver p .

Exemple

La droite passant par $A(2; -1)$ et de pente 3 a une équation de la forme :

$$y = 3x + p.$$

Comme A appartient à la droite :

$$-1 = 3 \times 2 + p, \quad p = -7.$$

Une équation de la droite est donc :

$$y = 3x - 7.$$

IV. parallélisme et intersection

2. Droites parallèles ou sécantes

Propriété

Deux droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Deux droites non parallèles sont sécantes : elles ont un unique point d'intersection.

Propriété

Deux droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$.
Si $m \neq m'$, elles sont sécantes.

3. Point d'intersection

Méthode

Pour déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes données par leurs équations réduites :

- résoudre l'équation obtenue en égalant les deux expressions de y ;
- trouver l'abscisse du point d'intersection ;
- remplacer cette abscisse dans l'une des deux équations pour trouver l'ordonnée.

Exemple

On considère les droites :

$$d_1 : y = 2x - 1 \quad \text{et} \quad d_2 : y = -x + 5.$$

On cherche leur point d'intersection :

$$2x - 1 = -x + 5 \iff 3x = 6 \iff x = 2.$$

On remplace dans l'équation de d_1 :

$$y = 2 \times 2 - 1 = 3.$$

Le point d'intersection est donc $I(2; 3)$.