

I. Équations du premier degré

Définition

Une **équation** est une égalité contenant une inconnue. Résoudre une équation, c'est déterminer toutes les valeurs de l'inconnue qui rendent l'égalité vraie.

Propriété

On peut transformer une équation en une équation équivalente en effectuant la même opération dans les deux membres.

Méthode

Pour résoudre une équation du premier degré :

- a) développer et réduire si nécessaire ;
- b) regrouper les termes en x d'un côté ;
- c) regrouper les nombres de l'autre côté ;
- d) diviser par le coefficient de x .

Exemples

$$5x - 15 = 0 \iff 5x = 15 \iff x = 3.$$

Donc $S = \{3\}$.

$$4x + 7 = 2x - 5 \iff 2x = -12 \iff x = -6.$$

Donc $S = \{-6\}$.

Autres exemples

$$3(x - 2) = 12 \iff 3x - 6 = 12 \iff 3x = 18 \iff x = 6.$$

$$2(3x + 1) - 5 = x + 7 \iff 6x + 2 - 5 = x + 7$$

$$6x - 3 = x + 7 \iff 5x = 10 \iff x = 2.$$

Propriété

L'équation $ax + b = 0$:

- admet une unique solution $x = -\frac{b}{a}$ si $a \neq 0$;
- n'admet aucune solution si $a = 0$ et $b \neq 0$;
- admet tous les réels pour solutions si $a = 0$ et $b = 0$.

II. Équations particulières

1. Équation produit nul

Propriété

Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul :

$$A(x)B(x) = 0 \iff A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0.$$

Méthode

Pour résoudre une équation produit nul :

- vérifier que l'équation est bien sous la forme d'un produit égal à zéro ;
- résoudre séparément chaque équation facteur égal à zéro ;
- réunir toutes les solutions obtenues.

Exemples

$$(2x - 6)(x + 5) = 0 \iff 2x - 6 = 0 \text{ ou } x + 5 = 0. \iff x = 3 \text{ ou } x = -5.$$

Ainsi, $S = \{-5; 3\}$.

$$x(4x - 12) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 4x - 12 = 0. \iff x = 0 \text{ ou } x = 3.$$

Ainsi, $S = \{0; 3\}$.

2. Équations du second degré simples**Méthode**

Pour résoudre une équation du type $ax^2 + c = 0$, avec $a \neq 0$:

- isoler x^2 ;
- résoudre une équation du type $x^2 = k$;
- si $k < 0$, il n'y a aucune solution réelle ;
- si $k = 0$, il y a une seule solution : 0 ;
- si $k > 0$, il y a deux solutions : $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$.

Exemples

$$x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = -3 \text{ ou } x = 3.$$

Donc $S = \{-3; 3\}$.

$$2x^2 - 18 = 0 \iff 2x^2 = 18 \iff x^2 = 9.$$

Donc $S = \{-3; 3\}$.

$$x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = -4.$$

Cette équation n'a aucune solution réelle.

Méthode

Pour résoudre une équation du type $ax^2 + bx = 0$, avec $a \neq 0$:

- factoriser par x ;
- utiliser la propriété du produit nul.

Exemples

$$x^2 - 5x = 0 \iff x(x - 5) = 0.$$

Donc :

$$x = 0 \text{ ou } x = 5.$$

Ainsi, $S = \{0; 5\}$.

$$3x^2 + 6x = 0 \iff 3x(x + 2) = 0.$$

Donc :

$$x = 0 \text{ ou } x = -2.$$

Ainsi, $S = \{-2; 0\}$.

3. Équations quotient

Méthode

Pour résoudre une équation quotient :

- a) commencer par déterminer les valeurs interdites, c'est-à-dire les valeurs qui annulent un dénominateur ;
- b) résoudre l'équation sur l'ensemble de définition ;
- c) vérifier que les solutions obtenues ne sont pas interdites.

Exemples

$$\frac{x+1}{x-3} = 2.$$

On doit avoir $x \neq 3$. Ensuite :

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-3} = 2 &\iff x+1 = 2(x-3). \\ x+1 &= 2x-6 \iff x = 7. \end{aligned}$$

Comme $7 \neq 3$, on obtient $S = \{7\}$.

$$\frac{2x-4}{x+5} = 0.$$

On doit avoir $x \neq -5$. Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul :

$$2x - 4 = 0 \iff x = 2.$$

Comme $2 \neq -5$, on obtient $S = \{2\}$.

$$\frac{x+2}{x-1} = 1.$$

On doit avoir $x \neq 1$. Ensuite :

$$x + 2 = x - 1.$$

Cette égalité est impossible. Donc $S = \emptyset$.

III. Inéquations du premier degré

Définition

Une **inéquation** est une inégalité contenant une inconnue. Résoudre une inéquation, c'est déterminer toutes les valeurs de l'inconnue qui rendent l'inégalité vraie.

Propriété

Multiplier ou diviser une inégalité par un nombre positif conserve le sens de l'inégalité.
Multiplier ou diviser une inégalité par un nombre négatif inverse le sens de l'inégalité.

Exemples

$$2 < 5 \implies 3 \times 2 < 3 \times 5 \implies 6 < 15.$$

$$2 < 5 \implies -4 \times 2 > -4 \times 5 \implies -8 > -20.$$

Méthode

Pour résoudre une inéquation du premier degré :

- a) développer et réduire si nécessaire ;
- b) regrouper les termes en x d'un côté ;
- c) regrouper les nombres de l'autre côté ;
- d) diviser par le coefficient de x ;
- e) inverser le sens de l'inégalité si ce coefficient est négatif.

Exemples

$$3x - 4 \geq 8 \iff 3x \geq 12 \iff x \geq 4.$$

Donc $S = [4; +\infty[$.

$$-2x + 5 < 11 \iff -2x < 6 \iff x > -3.$$

Donc $S =]-3; +\infty[$.

$$5x + 2 \leq 2x + 14 \iff 3x \leq 12 \iff x \leq 4.$$

Donc $S =]-\infty; 4]$.

$$-3(x - 1) > 12 \iff -3x + 3 > 12 \iff -3x > 9 \iff x < -3.$$

Donc $S =]-\infty; -3[$.

Méthode

Pour résoudre une inéquation de la forme $ax + b > 0$:

- a) résoudre l'équation $ax + b = 0$;
- b) utiliser le signe du coefficient a ;
- c) donner l'intervalle solution.

Exemple

Résoudre $2x - 6 > 0$.

$$2x - 6 = 0 \iff x = 3.$$

Comme le coefficient directeur 2 est positif :

$$2x - 6 > 0 \iff x > 3.$$

Donc $S =]3; +\infty[$.

IV. Exprimer une variable en fonction des autres**Définition**

Exprimer une variable en fonction des autres, c'est transformer une formule pour isoler cette variable.

Méthode

Pour exprimer une variable en fonction des autres :

- a) repérer la variable que l'on veut isoler ;
- b) effectuer les mêmes opérations des deux côtés de l'égalité ;
- c) terminer par une formule du type « variable = expression » ;
- d) préciser les conditions nécessaires lorsque l'on divise par une quantité.

Exemples simples

$$U = RI$$

On veut exprimer I :

$$I = \frac{U}{R} \quad (R \neq 0).$$

$$V = abc$$

On veut exprimer a :

$$a = \frac{V}{bc} \quad (b \neq 0, c \neq 0).$$

$$d = vt$$

On veut exprimer t :

$$t = \frac{d}{v} \quad (v \neq 0).$$

$$V = \pi r^2 h$$

On veut exprimer h :

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \quad (r \neq 0).$$

Méthode

Pour exprimer une variable dans une relation du premier degré $ax + by = c$, on isole la variable demandée.

Exemples avec deux variables

Dans la relation :

$$3x + 2y = 8,$$

on veut exprimer y en fonction de x :

$$2y = 8 - 3x \iff y = 4 - \frac{3}{2}x.$$

Dans la relation :

$$5x - 4y = 12,$$

on veut exprimer x en fonction de y :

$$5x = 12 + 4y \iff x = \frac{12 + 4y}{5}.$$

Méthode

Lorsqu'une formule contient un carré, on peut être amené à utiliser une racine carrée. Dans un contexte de longueur, de rayon ou de distance, on garde la solution positive.

Exemples avec un carré

$$S = \pi r^2$$

On veut exprimer r :

$$r^2 = \frac{S}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad (r \geq 0).$$

$$A = c^2$$

On veut exprimer c , avec $c \geq 0$:

$$c = \sqrt{A}.$$