

1. Expérience aléatoire et évènements

Définition

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat. Chaque résultat possible est appelé une **issue**. L'ensemble de toutes les issues possibles est appelé **univers** et se note souvent Ω .

Un **évènement** est un ensemble d'issues.

exemple :

On lance un dé équilibré à six faces. $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

L'évènement A : « obtenir un nombre pair » est : $A = \{2; 4; 6\}$

Propriété

Une probabilité est toujours un nombre compris entre 0 et 1. $0 \leq P(A) \leq 1$

De plus : $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$

2. Équiprobabilité

Définition

On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque toutes les issues ont la même probabilité.

Propriété

Dans une situation d'équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}}$

On peut aussi écrire : $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$

■ **remarque** : $\text{Card}(A)$ veut dire l'ensemble des éléments dans A

exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

On note A l'évènement : « obtenir un roi ».

Il y a 4 rois dans un jeu de 32 cartes, donc : $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

3. Évènement contraire

Définition

L'évènement contraire de A , noté $\overline{A}$, est l'évènement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

Propriété

Pour tout évènement A : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

exemple : Si la probabilité qu'un train soit en retard est 0,12, alors la probabilité qu'il ne soit pas en retard est :

$$1 - 0,12 = 0,88$$

4. Réunion et intersection d'évènements

Définition

Soient A et B deux évènements.

- $A \cap B$ signifie : « A et B se réalisent ».
- $A \cup B$ signifie : « A ou B se réalise », éventuellement les deux.

Propriété

Si deux évènements A et B sont incompatibles, c'est-à-dire s'ils ne peuvent pas se produire en même temps, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

exemple : On lance un dé équilibré.

On note : $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{3; 5; 6\}$ on a donc $A \cap B = \{3\}$

On a donc : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

5. Loi des grands nombres

Propriété

Lorsque l'on répète un grand nombre de fois une même expérience aléatoire, la fréquence observée d'un évènement se rapproche généralement de sa probabilité.

On dit que les fréquences se stabilisent autour de la probabilité.

■ **remarque :** La probabilité appartient au **modèle théorique**. La fréquence appartient aux **résultats observés**.

Par exemple :, pour une pièce équilibrée : $P(\text{pile}) = \frac{1}{2}$

Mais sur 10 lancers, on n'obtient pas forcément exactement 5 piles.

6. Probabilité conditionnelle

Définition

Soient A et B deux évènements, avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de B sachant A est la probabilité que B se réalise lorsque l'on sait déjà que A est réalisé.
Elle se note : $P_A(B)$
et se lit : « probabilité de B sachant A ».

Propriété

On a : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
Donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

exemple : Dans une classe, 20 élèves font espagnol. Parmi eux, 8 sont demi-pensionnaires.

On choisit au hasard un élève parmi ceux qui font espagnol.

La probabilité qu'il soit demi-pensionnaire est : $\frac{8}{20} = 0,4$

Si E désigne l'évènement « faire espagnol » et D l'évènement « être demi-pensionnaire », alors : $P_E(D) = 0,4$

■ **remarque :**

⚠ Attention : $P_A(B) \neq P_B(A)$ en général.

Dire « parmi les élèves qui font espagnol, certains sont demi-pensionnaires » n'est pas la même chose que dire « parmi les demi-pensionnaires, certains font espagnol ».

7. Tableaux croisés et probabilités conditionnelles

Méthode

Pour calculer une probabilité conditionnelle dans un tableau croisé :

- On repère la condition donnée.
- On se limite à la ligne ou à la colonne correspondante.
- On calcule la proportion demandée dans cette ligne ou cette colonne.

exemple : Dans un lycée, on interroge 100 élèves.

	Fille	Garçon	Total
Demi-pensionnaire	30	20	50
Externe	25	25	50
Total	55	45	100

On choisit un élève au hasard.

On note : D : « l'élève est demi-pensionnaire » F : « l'élève est une fille »

Alors : $P_D(F) = \frac{30}{50} = 0,6$

Cela signifie : parmi les demi-pensionnaires, 60 % sont des filles.

En revanche : $P_F(D) = \frac{30}{55}$

Cela signifie : parmi les filles, la proportion de demi-pensionnaires est $\frac{30}{55}$.

8. Arbres pondérés

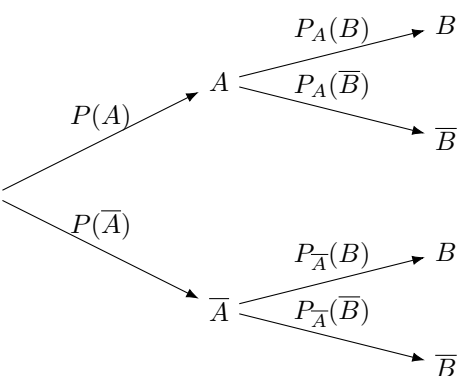
Définition

Un **arbre pondéré** permet de représenter une expérience aléatoire en plusieurs étapes.
Les nombres écrits sur les branches sont des probabilités.

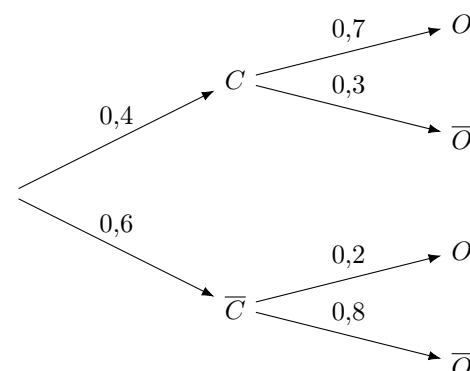
Propriété

Dans un arbre pondéré :

- la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 ;
- la probabilité d'un chemin se calcule en multipliant les probabilités des branches de ce chemin.



exemple :



Dans une entreprise, 40 % des salariés sont cadres. Parmi les cadres, 70 % ont un ordinateur portable. Parmi les non-cadres, 20 % ont un ordinateur portable. On note : C : « le salarié est cadre » ; O : « le salarié a un ordinateur portable »

On a : $P(C) = 0,4$ $P_C(O) = 0,7$

La probabilité qu'un salarié soit cadre et ait un ordinateur portable est :

$$P(C \cap O) = P(C) \times P_C(O)$$

$$P(C \cap O) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$$