

I. Vecteurs colinéaires

Définition

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel k tel que

$$\vec{v} = k\vec{u}.$$

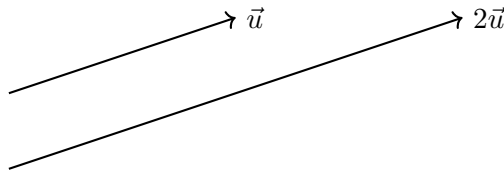
Autrement dit, un vecteur est un multiple de l'autre.

Propriété

Deux vecteurs colinéaires ont la même direction.

Ils peuvent :

- avoir le même sens ;
- avoir un sens contraire ;
- avoir des longueurs différentes.



II. Déterminant de deux vecteurs

Définition

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

Propriété

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Exemple Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$.

On calcule : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

Remarque

On pouvait également remarquer que $\vec{v} = 3\vec{u}$. ou encore que $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v}$.

Ainsi, $\vec{v}$ est un multiple de $\vec{u}$. D'après la définition, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

Le calcul du déterminant permet simplement de vérifier la colinéarité de façon systématique.

Le déterminant étant nul, les vecteurs sont colinéaires.

III. Application : alignement de trois points et droites parallèles

Définition

On appelle **vecteur directeur** d'une droite tout vecteur non nul ayant la même direction que cette droite.

Propriété

Si A et B sont deux points distincts d'une droite (d) , alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (d) .

Exemple

Soient $A(1; 2)$ et $B(4; 6)$.

On a : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .

Remarque

Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs. Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite, alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est également un vecteur directeur de cette droite.

Par exemple, les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont tous des vecteurs directeurs d'une même droite.

Propriété

- Trois points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Deux droites sont parallèles si et seulement si elles possèdent des vecteurs directeurs colinéaires.

Méthode

Montrer que trois points sont alignés

- Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
- Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$.
- Vérifier que ces deux vecteurs sont colinéaires.

Montrer que deux droites sont parallèles

- Calculer un vecteur directeur de chaque droite.
- Vérifier que ces vecteurs sont colinéaires.

Exemple

À retenir

- Deux vecteurs sont colinéaires lorsque l'un est un multiple de l'autre.
- Le déterminant de deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$.
- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
- Pour montrer que trois points sont alignés : on prouve que deux vecteurs construits avec ces points sont colinéaires.
- Pour montrer que deux droites sont parallèles : on prouve que leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.