

Exercice 1 — Formule explicite et récurrence

- a) $u_0 = 4$, $u_1 = 2 - 3 + 4 = 3$, $u_5 = 50 - 15 + 4 = 39$, $u_{10} = 200 - 30 + 4 = 174$.
- b) $v_1 = 2 \times 3 - 1 = 5$, $v_2 = 9$, $v_3 = 17$, $v_4 = 33$.
- c) La formule explicite donne directement $u_{20} = 2 \times 20^2 - 3 \times 20 + 4 = 744$.
- d) v_{n+1} est le terme de rang $n + 1$, tandis que $v_n + 1$ est le terme de rang n augmenté de 1. Par exemple, $v_1 = 5$ mais $v_0 + 1 = 4$.

Exercice 2 — Reconnaître une suite arithmétique

- a) On ajoute 4 : $u_0 = 5$, $r = 4$, donc $u_n = 5 + 4n$.
- b) On ajoute -6 : $u_0 = 40$, $r = -6$, donc $u_n = 40 - 6n$.
- c) Non : $6 - 2 = 4$ et $18 - 6 = 12$. Les différences ne sont pas constantes.
- d) $u_{n+1} - u_n = -4$: la suite est arithmétique, de premier terme $u_0 = 7$ et de raison -4 . Sa formule est $u_n = 7 - 4n$.

Exercice 3 — Termes d'une suite arithmétique

On utilise $u_n = u_p + (n - p)r$.

- a) $u_{18} = 12 + 18 \times 5 = 102$.
- b) $u_{15} = 31 + (15 - 4)(-3) = -2$ et $u_0 = 31 - 4(-3) = 43$.
- c) $r = \frac{74 - 26}{19 - 7} = 4$, puis $u_0 = 26 - 7 \times 4 = -2$.

Exercice 4 — Reconnaître une suite géométrique

- a) On multiplie par 2 : $v_0 = 3$, $q = 2$, donc $v_n = 3 \times 2^n$.
- b) On multiplie par $\frac{1}{2}$: $v_0 = 160$, $q = \frac{1}{2}$, donc $v_n = 160 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- c) Non : $6/2 = 3$ et $12/6 = 2$. Les quotients ne sont pas constants.
- d) La suite est géométrique de premier terme $v_0 = 7$ et de raison $q = 0,9$. Sa formule est $v_n = 7 \times 0,9^n$.

Exercice 5 — Termes d'une suite géométrique

On utilise $v_n = v_p q^{n-p}$.

- a) $v_6 = 5 \times 1,4^6 = 37,64768$.
- b) $v_8 = 81 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3}$ et $v_0 = \frac{81}{(1/3)^3} = 2187$.
- c) $q^3 = \frac{v_5}{v_2} = 8$, donc $q = 2$, puis $v_0 = 12/2^2 = 3$.

Exercice 6 — Somme de termes arithmétiques

Une somme arithmétique vaut : nombre de termes $\times$ moyenne des termes extrêmes.

- a) $u_{20} = 7 + 20 \times 4 = 87$.
- b) Il y a 21 termes : $S = 21 \times \frac{7 + 87}{2} = 987$.
- c) $u_8 = 39$. Il y a $20 - 8 + 1 = 13$ termes : $T = 13 \times \frac{39 + 87}{2} = 819$.

d) $u_7 = 35$, donc $u_0 + \dots + u_7 = 8 \times \frac{7+35}{2} = 168$. Ainsi $T = 987 - 168 = 819$.

Exercice 7 — Somme de termes géométriques

Une somme géométrique de raison $q \neq 1$ vaut : premier terme $\times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

a) $v_7 = 12 \times 1,5^7 = 205,03125$.

b) $S = 12 \times \frac{1 - 1,5^8}{1 - 1,5} = 591,09375$.

c) $v_3 = 40,5$. Première méthode : $T = 40,5 \times \frac{1 - 1,5^5}{1 - 1,5} = 534,09375$.

Deuxième méthode : $T = S - (v_0 + v_1 + v_2) = 591,09375 - (12 + 18 + 27) = 534,09375$.

d) La somme contient $15 - 3 + 1 = 13$ termes.

Exercice 8 — Étudier une variation par différence

a) $u_{n+1} - u_n = 5 > 0$: la suite est strictement croissante.

b) $u_{n+1} - u_n = 2n + 4 > 0$: la suite est strictement croissante.

c) $u_{n+1} - u_n = 1 - 2n$. Cette différence est positive pour $n = 0$, puis négative pour $n \geq 1$. Ainsi $u_0 = -5 < u_1 = -4$, puis la suite est strictement décroissante à partir du rang 1. Elle n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.

d) $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{n+2} - \frac{3}{n+1} = \frac{-3}{(n+1)(n+2)} < 0$: la suite est strictement décroissante.

Exercice 9 — Conjecturer une limite

a) $u_0 = 8$, $u_9 = 3,5$, $u_{99} = 3,05$, $u_{999} = 3,005$.

b) On conjecture que $u_n \rightarrow 3$, ce qui se confirme puisque $5/(n+1) \rightarrow 0$.

c) $v_{10} = 13$, $v_{100} = 193$, $v_{1000} = 1993$. On conjecture $v_n \rightarrow +\infty$.

d) Non : $5/(n+1) > 0$, donc $u_n > 3$ pour tout n .

Exercice 10 — Limites usuelles

a) $4n + 7 \rightarrow +\infty$.

b) $-3n^2 + 2 \rightarrow -\infty$.

c) $8/n \rightarrow 0$, donc $w_n \rightarrow 5$.

d) $3/n^2 \rightarrow 0$, donc $t_n \rightarrow 1$.

e) $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$, donc $a_n \rightarrow +\infty$.

f) La suite n'a pas de limite : $b_{2n} = 1$ et $b_{2n+1} = -1$.

Exercice 11 — Limite de puissances

On rappelle que $q^n \rightarrow 0$ si $0 < q < 1$ et $q^n \rightarrow +\infty$ si $q > 1$.

a) $u_n \rightarrow 0$ car $0 < 0,6 < 1$.

b) $v_n \rightarrow 4$ car $0,85^n \rightarrow 0$.

c) $w_n \rightarrow +\infty$ car $1,12 > 1$.

- d) $t_n \rightarrow -\infty$ car $1,03^n \rightarrow +\infty$.
 e) $a_n = 9$ pour tout n , donc $a_n \rightarrow 9$.
 f) $b_n \rightarrow 3$ car $0,4^n \rightarrow 0$.

Exercice 12 — Opérations sur les limites

- a) $u_n \rightarrow 5 + 0 - 0 = 5$.
 b) $v_n \rightarrow (2 + 0)(4 - 0) = 8$.
 c) $w_n \rightarrow \frac{3 + 0}{5 - 0} = \frac{3}{5}$, le dénominateur ayant une limite non nulle.
 d) $t_n \rightarrow (4 - 0)(2 + 0) = 8$.

Exercice 13 — Quotients de polynômes

- a) $u_n = \frac{5 + 2/n}{2 - 3/n} \rightarrow \frac{5}{2}$.
 b) $v_n = \frac{3 - 1/n + 1/n^2}{1 + 4/n^2} \rightarrow 3$.
 c) $w_n = \frac{2/n + 1/n^2}{1 + 3/n^2} \rightarrow 0$.
 d) $t_n = \frac{-4 + 3/n}{2 - 1/n + 5/n^2} \rightarrow -2$.

Exercice 14 — Transformer une forme indéterminée

Les écritures suivantes sont utilisées pour $n \geq 1$.

- a) $u_n = n^2 \left(1 - \frac{5}{n}\right) \rightarrow +\infty$, car la parenthèse tend vers 1.
 b) $v_n = n^3 \left(-2 + \frac{7}{n} + \frac{1}{n^3}\right) \rightarrow -\infty$, car la parenthèse tend vers -2 .
 c) $w_n = n \frac{1 - 4/n}{3 + 1/n} \rightarrow +\infty$, car le quotient tend vers $1/3 > 0$.
 d) $t_n = n \frac{5 - 1/n^2}{2 + 7/n^2} \rightarrow +\infty$, car le quotient tend vers $5/2 > 0$.

Exercice 15 — Comparer pour déterminer une limite

Pour tout $n \geq 0$:

- a) $u_n \geq n^2$ et $n^2 \rightarrow +\infty$, donc $u_n \rightarrow +\infty$.
 b) $v_n \leq -n^2 + 5$ et $-n^2 + 5 \rightarrow -\infty$, donc $v_n \rightarrow -\infty$.
 c) $w_n \geq n$ et $n \rightarrow +\infty$, donc $w_n \rightarrow +\infty$.
 d) $t_n \leq -2n$ et $-2n \rightarrow -\infty$, donc $t_n \rightarrow -\infty$.

Exercice 16 — Théorème des gendarmes

Dans chaque cas, les deux bornes tendent vers 0, donc la suite tend vers 0.

- a) $-\frac{1}{n+2} \leq u_n \leq \frac{1}{n+2}$.

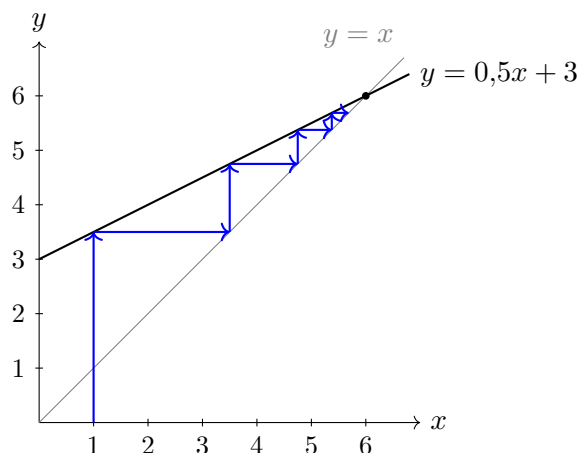
- b) $-\frac{1}{n} \leq v_n \leq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.
- c) $\frac{1}{n+1} \leq w_n \leq \frac{3}{n+1}$, car $1 \leq 2 + (-1)^n \leq 3$.
- d) $-0,7^n \leq t_n \leq 0,7^n$.

Exercice 17 — Suite arithmético-géométrique

- a) $u_1 = 14, u_2 = 16,4, u_3 = 17,84$.
- b) $L = 0,6L + 8 \iff 0,4L = 8 \iff L = 20$.
- c) $v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = 0,6u_n - 12 = 0,6(u_n - 20) = 0,6v_n$. Ainsi (v_n) est géométrique de raison 0,6 et $v_0 = -10$.
- d) $v_n = -10 \times 0,6^n$, donc $u_n = 20 - 10 \times 0,6^n$.
- e) Puisque $0,6^n \rightarrow 0$, on obtient $u_n \rightarrow 20$.

Exercice 18 — Représentation en toile d'araignée

- a) $u_1 = 3,5, u_2 = 4,75, u_3 = 5,375, u_4 = 5,6875$.
- b) La droite $y = 0,5x + 3$ passe par $(0; 3)$ et $(6; 6)$. La droite $y = x$ passe par $(0; 0)$ et $(6; 6)$.
- c) À partir de $(u_0; 0)$, on monte verticalement jusqu'à $y = 0,5x + 3$, puis on rejoint horizontalement $y = x$. On répète ces deux déplacements pour obtenir les termes suivants.



- d) On conjecture que la suite est strictement croissante et tend vers 6.
- e) Le point fixe vérifie $L = 0,5L + 3$, donc $L = 6$. Comme $u_{n+1} - 6 = 0,5(u_n - 6)$ et $u_0 - 6 = -5$, on a

$$u_n = 6 - 5 \times 0,5^n.$$

Alors $u_{n+1} - u_n = 2,5 \times 0,5^n > 0$ et $u_n \rightarrow 6$: la conjecture est démontrée.

Exercice 19 — Épargne avec versements réguliers

- a) Le capital initial est $u_0 = 2000$. Les intérêts multiplient le capital par 1,03, puis on ajoute 600 euros : $u_{n+1} = 1,03u_n + 600$.
- b) $u_1 = 2660$ euros et $u_2 = 3339,80$ euros.
- c) $L = 1,03L + 600 \iff -0,03L = 600 \iff L = -20\,000$.
- d) $u_{n+1} + 20\,000 = 1,03(u_n + 20\,000)$. La suite $(u_n + 20\,000)$ est donc géométrique, de premier terme 22 000. Ainsi

$$u_n = 22\,000 \times 1,03^n - 20\,000.$$

Exercice 20 — Amortissement d'une dette

- a) $d_0 = 50\,000$ et $d_{n+1} = 1,02d_n - 8\,000$.
 b) $d_1 = 43\,000$, $d_2 = 35\,860$ et $d_3 = 28\,577,20$ euros.
 c) $L = 1,02L - 8\,000$ donne $L = 400\,000$. Comme $d_{n+1} - 400\,000 = 1,02(d_n - 400\,000)$, on obtient

$$d_n = 400\,000 - 350\,000 \times 1,02^n.$$

- d) Puisque $1,02^n \rightarrow +\infty$, cette expression finit par être négative. Une dette remboursée vaut 0 : le dernier remboursement doit être ajusté au montant restant dû, puis on arrête le modèle.

Exercice 21 — Population de poissons

- a) $p_0 = 120$ et $p_{n+1} = 0,85p_n + 45$.
 b) $p_1 = 147$, $p_2 = 169,95$ et $p_3 = 189,4575$ (effectifs théoriques).
 c) $L = 0,85L + 45 \iff L = 300$ poissons.
 d) $p_{n+1} - 300 = 0,85(p_n - 300)$ et $p_0 - 300 = -180$, donc

$$p_n = 300 - 180 \times 0,85^n.$$

$p_{n+1} - p_n = 27 \times 0,85^n > 0$: la suite est strictement croissante. Comme $0,85^n \rightarrow 0$, sa limite est 300.

Exercice 22 — Diffusion d'une publicité

- a) $a_1 = 0,7 \times 5\,000 + 9\,000 = 12\,500$, puis $a_2 = 17\,750$.
 b) $L = 0,7L + 9\,000 \iff L = 30\,000$.
 c) $a_{n+1} - 30\,000 = 0,7(a_n - 30\,000)$ et $a_0 - 30\,000 = -25\,000$, donc

$$a_n = 30\,000 - 25\,000 \times 0,7^n \longrightarrow 30\,000.$$

- d) $a_{n+1} - a_n = 7\,500 \times 0,7^n > 0$: la suite est strictement croissante.

Exercice 23 — Traitement d'un polluant

- a) Après élimination de 25 %, il reste 75 % du polluant, puis on ajoute 6 mg. Donc $u_0 = 80$ et $u_{n+1} = 0,75u_n + 6$.
 b) $L = 0,75L + 6 \iff L = 24$ mg. À cette quantité, les 6 mg éliminés chaque jour compensent exactement les 6 mg ajoutés.
 c) $u_{n+1} - 24 = 0,75(u_n - 24)$. La suite $(u_n - 24)$ est géométrique, de raison 0,75 et de premier terme $80 - 24 = 56$. Ainsi

$$u_n = 24 + 56 \times 0,75^n.$$

- d) $u_{n+1} - u_n = -14 \times 0,75^n < 0$: la suite est strictement décroissante. Puisque $0,75^n \rightarrow 0$, elle tend vers 24 mg.
 e) En additionnant les $n + 1$ termes,

$$Q_n = 24(n + 1) + 56 \frac{1 - 0,75^{n+1}}{1 - 0,75} = 24(n + 1) + 224(1 - 0,75^{n+1}).$$

- f) $M_n = 24 + \frac{224(1 - 0,75^{n+1})}{n + 1}$. Comme

$$0 \leq \frac{224(1 - 0,75^{n+1})}{n + 1} \leq \frac{224}{n + 1} \rightarrow 0,$$

on obtient $M_n \rightarrow 24$ mg.