

1. Rappels sur les suites

1.1 Définition d'une suite

Définition

Une suite numérique (u_n) associe à chaque entier naturel n un nombre réel noté u_n .
Le nombre u_n est le **terme de rang** n . Le premier terme est généralement u_0 .

Formule explicite

On donne directement u_n en fonction de n .
Si $u_n = 3n + 2$, alors :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5, \quad u_2 = 8.$$

Relation de récurrence

On donne un premier terme et une relation permettant de calculer le suivant.

Si $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 3v_n + 1$, alors :

$$v_1 = 7, \quad v_2 = 22, \quad v_3 = 67.$$

■ Remarque

u_{n+1} désigne le terme suivant u_n , tandis que $u_n + 1$ désigne le nombre u_n augmenté de 1.

1.2 Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est **arithmétique de raison** r si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre.

Propriété

Si (u_n) est arithmétique de raison r , alors :

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{et} \quad u_n = u_p + (n - p)r.$$

Exemple

Si $u_0 = 5$ et $r = 3$, alors $u_n = 5 + 3n$. En particulier, $u_{10} = 35$.

1.3 Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est **géométrique de raison** q si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = qu_n.$$

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre.

Propriété

Si (u_n) est géométrique de raison $q > 0$, alors :

$$u_n = u_0 q^n \quad \text{et} \quad u_n = u_p q^{n-p}.$$

Exemple

Un capital de 1 000 euros augmente de 2 % par an. Après n années, il vaut $u_n = 1\,000 \times 1,02^n$ euros.

2. Sommes et variations

2.1 Sommes de termes consécutifs

Propriété

Si (u_n) est une suite arithmétique, alors :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

C'est le nombre de termes multiplié par la moyenne des termes extrêmes.

Propriété

Pour $q \neq 1$, on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Si (u_n) est géométrique de raison $q \neq 1$, alors :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exemple

Pour $u_n = 5 \times 2^n$, la somme des cinq premiers termes vaut :

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 5 \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = 155.$$

■ Remarque

De u_0 à u_n , il y a $n+1$ termes. Si $q = 1$, la suite est constante et la somme vaut $(n+1)u_0$.

2.2 Sens de variation

Définition

Une suite (u_n) est :

- **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n ;
- **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n .

On dit **strictement** croissante ou décroissante lorsque l'inégalité est stricte.

Pour étudier les variations d'une suite, on peut calculer $u_{n+1} - u_n$ et déterminer son signe.

Exemple

Si $u_n = 3n + 2$, alors $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3 > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Propriété

Une suite arithmétique est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$ et constante si $r = 0$.

Une suite géométrique de **premier terme positif** est strictement croissante si $q > 1$, strictement décroissante si $0 < q < 1$ et constante si $q = 1$.

3. Limite d'une suite

3.1 Limite finie

Exemple

Pour $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$, on obtient :

$$u_0 = 3, \quad u_9 = 2,1, \quad u_{99} = 2,01, \quad u_{999} = 2,001.$$

Les termes se rapprochent de 2 lorsque n devient grand. On dit que la suite converge vers 2.

Définition

Une suite (u_n) **converge vers un réel** ℓ si ses termes deviennent et restent aussi proches que l'on veut de ℓ lorsque n est suffisamment grand.

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

■ Remarque

Une suite peut converger vers une valeur sans jamais l'atteindre.

3.2 Limite infinie

Définition

Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si ses termes finissent par dépasser n'importe quel nombre fixé et restent au-dessus.

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On définit de même une limite égale à $-\infty$.

Exemples

$u_n = n^2$ tend vers $+\infty$ et $v_n = -3n + 1$ tend vers $-\infty$.

La suite $w_n = (-1)^n$ alterne entre 1 et -1 : elle n'admet pas de limite.

3.3 Limites usuelles

Propriété

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n &= +\infty, & \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 &= +\infty, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} &= +\infty. \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} &= 0, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} &= 0. \end{aligned}$$

3.4 Limite de q^n pour $q > 0$

Propriété

- Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$, alors $q^n = 1$ pour tout n .
- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Exemples

$5 \times 0,8^n$ tend vers 0 ; $3 \times 1,2^n$ tend vers $+\infty$; $-2 \times 1,5^n$ tend vers $-\infty$.

4. Calculs de limites

4.1 Opérations sur les limites

Propriété

Si u_n converge vers ℓ et v_n converge vers m , alors :

$$u_n + v_n \longrightarrow \ell + m, \quad u_n v_n \longrightarrow \ell m.$$

Si $m \neq 0$, alors $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow \frac{\ell}{m}$.

Exemples

Comme $0,8^n$ tend vers 0, la suite $u_n = 4 - 3 \times 0,8^n$ converge vers 4.

Pour $v_n = \frac{2n+1}{n+3}$, on divise le numérateur et le dénominateur par n :

$$v_n = \frac{2 + 1/n}{1 + 3/n} \longrightarrow \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2.$$

Remarque : les formes $+\infty - \infty$, ∞/∞ , $0/0$ et $0 \times \infty$ ne permettent pas de conclure directement. Il faut transformer l'expression ou utiliser une comparaison.

4.2 Comparaison et encadrement

Propriété

Les propriétés suivantes sont admises. Les inégalités peuvent être vérifiées seulement à partir d'un certain rang.

- Si $u_n \leq v_n$, $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow m$, alors $\ell \leq m$.
- Si $u_n \geq v_n$ et $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n \rightarrow +\infty$.
- Si $u_n \leq v_n$ et $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n \rightarrow -\infty$.

Propriété

Théorème des gendarmes. Si $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang et si (a_n) et (b_n) convergent vers un même réel ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ .

Exemple

Comme $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, on a :

$$-\frac{1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, $\frac{(-1)^n}{n+1}$ tend vers 0.

4.3 Limite d'une somme géométrique

Propriété

Si $0 < q < 1$, alors :

$$S_n = u_0 + u_0 q + \cdots + u_0 q^n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1 - q}.$$

Exemple : $1 + 0,5 + 0,5^2 + \cdots + 0,5^n$ tend vers $\frac{1}{1 - 0,5} = 2$.

5. Suites arithmético-géométriques

Définition

Une suite (u_n) est **arithmético-géométrique** si elle vérifie une relation de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b,$$

où a et b sont deux réels fixés.

Exemple

Un bassin contient 100 poissons. Chaque année, 80 % des poissons survivent, puis on ajoute 60 poissons. On note u_n l'effectif après n années, une fois l'ajout effectué. Alors :

$$u_0 = 100 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 0,8u_n + 60.$$

En particulier, $u_1 = 140$ et $u_2 = 172$.

5.1 Recherche d'une suite auxiliaire

Méthode

Pour étudier $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$:

- a on cherche une solution constante L en résolvant $L = aL + b$;
- b on pose $v_n = u_n - L$;
- c on montre que (v_n) est géométrique ;
- d on exprime v_n , puis u_n , en fonction de n .

Exemple

Pour la suite $u_{n+1} = 0,8u_n + 60$, on résout :

$$L = 0,8L + 60 \quad \Longleftrightarrow \quad 0,2L = 60 \quad \Longleftrightarrow \quad L = 300.$$

On pose $v_n = u_n - 300$. Alors :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 300 = 0,8u_n - 240 = 0,8(u_n - 300) = 0,8v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = -200$.

Ainsi, $v_n = -200 \times 0,8^n$, d'où :

$$u_n = 300 - 200 \times 0,8^n.$$

Comme $0,8^n$ tend vers 0, la suite (u_n) converge vers 300.

5.2 Formule générale

Propriété

Si $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$, en posant $L = \frac{b}{1-a}$, on obtient :

$$u_n = L + (u_0 - L)a^n.$$

En particulier, si $0 < a < 1$, la suite converge vers L .

■ Remarque

Si $a = 1$, la suite est arithmétique. Si $a = 0$, alors $u_n = b$ pour $n \geq 1$. Trouver une solution constante ne suffit pas à prouver que la suite converge vers cette valeur.

6. Représentation graphique et seuil

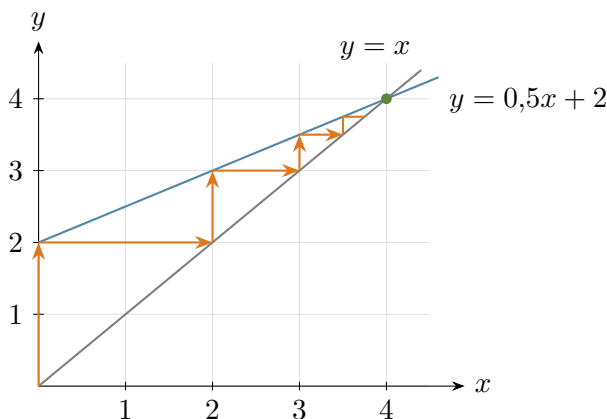
6.1 Représentation d'une suite récurrente

Pour représenter les premiers termes d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, on trace la courbe de f et la droite $y = x$.

À partir de u_0 sur l'axe des abscisses, on rejoint verticalement la courbe, puis horizontalement la droite $y = x$. On recommence pour obtenir les termes suivants.

Exemple

On considère $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$.



On obtient $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et $u_3 = 3,5$. Le graphique permet de conjecturer que la suite est croissante et converge vers 4, mais ne constitue pas une démonstration.

6.2 Recherche d'un seuil

Exemple

On reprend $u_n = 300 - 200 \times 0,8^n$. On cherche le premier rang tel que $u_n > 280$.

La suite est strictement croissante car $u_{n+1} - u_n = 40 \times 0,8^n > 0$. Comme elle converge vers 300, elle finira par dépasser 280.

On peut utiliser le programme Python suivant :

```
n = 0
u = 100
while u <= 280:
    u = 0.8 * u + 60
    n = n + 1
print(n)
```

Le programme affiche 11. En effet, $u_{10} \approx 278,53$ et $u_{11} \approx 282,82$.

■ Remarque

La boucle continue tant que le seuil n'est pas dépassé. Il faut vérifier que le seuil peut être franchi pour éviter une boucle sans fin.