

Rappels sur les suites

Exercice 1 — Formule explicite et relation de récurrence

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = 2n^2 - 3n + 4 \quad \text{et} \quad v_0 = 3, \quad v_{n+1} = 2v_n - 1.$$

- a) Calculer u_0 , u_1 , u_5 et u_{10} .
- b) Calculer successivement v_1 , v_2 , v_3 et v_4 .
- c) Expliquer pourquoi le calcul de u_{20} ne nécessite pas celui de u_{19} .
- d) Expliquer la différence entre v_{n+1} et $v_n + 1$.

Exercice 2 — Reconnaître une suite arithmétique

Pour chacune des suites suivantes, déterminer si elle est arithmétique. Si oui, préciser son premier terme, sa raison et donner une formule explicite.

- a) 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; ...
- b) 40 ; 34 ; 28 ; 22 ; 16 ; ...
- c) 2 ; 6 ; 18 ; 54 ; ...
- d) $u_n = 7 - 4n$.

Exercice 3 — Termes d'une suite arithmétique

La suite (u_n) est arithmétique de raison r .

- a) On donne $u_0 = 12$ et $r = 5$. Calculer u_{18} .
- b) On donne $u_4 = 31$ et $r = -3$. Calculer u_{15} et u_0 .
- c) On donne $u_7 = 26$ et $u_{19} = 74$. Déterminer r , puis u_0 .

Exercice 4 — Reconnaître une suite géométrique

Pour chacune des suites suivantes, déterminer si elle est géométrique. Si oui, préciser son premier terme, sa raison et donner une formule explicite.

- a) 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; ...
- b) 160 ; 80 ; 40 ; 20 ; ...
- c) 2 ; 6 ; 12 ; 20 ; ...
- d) $v_n = 7 \times 0,9^n$.

Exercice 5 — Termes d'une suite géométrique

La suite (v_n) est géométrique de raison positive q .

- a) On donne $v_0 = 5$ et $q = 1,4$. Calculer v_6 .
- b) On donne $v_3 = 81$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer v_8 et v_0 .
- c) On donne $v_2 = 12$ et $v_5 = 96$. Déterminer q , puis v_0 .

Sommes et variations

Exercice 6 — Somme de termes arithmétiques

On considère la suite arithmétique (u_n) définie par $u_0 = 7$ et $r = 4$.

- a) Calculer u_{20} .
- b) Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$.
- c) Calculer $T = u_8 + u_9 + \cdots + u_{20}$.
- d) Retrouver T à l'aide de la différence de deux sommes commençant au rang 0.

Exercice 7 — Somme de termes géométriques

On considère la suite géométrique (v_n) définie par $v_0 = 12$ et $q = 1,5$.

- a) Calculer v_7 .
- b) Calculer $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_7$.
- c) Calculer $T = v_3 + v_4 + \cdots + v_7$ de deux façons différentes.
- d) Combien de termes contient la somme $v_3 + \cdots + v_{15}$?

Exercice 8 — Étudier une variation par différence

Dans chaque cas, calculer $u_{n+1} - u_n$, puis étudier le sens de variation de (u_n) .

- a) $u_n = 5n - 12$.
- b) $u_n = n^2 + 3n + 1$.
- c) $u_n = -n^2 + 2n - 5$.
- d) $u_n = 4 + \frac{3}{n+1}$.

Limites de suites

Exercice 9 — Conjecturer une limite

On considère $u_n = 3 + \frac{5}{n+1}$ et $v_n = 2n - 7$.

- a) Calculer u_0 , u_9 , u_{99} et u_{999} .
- b) Conjecturer la limite de (u_n) .
- c) Calculer v_{10} , v_{100} et v_{1000} , puis conjecturer sa limite.
- d) La suite (u_n) atteint-elle sa limite ? Justifier.

Exercice 10 — Limites usuelles

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes.

- a) $u_n = 4n + 7$.
- b) $v_n = -3n^2 + 2$.
- c) $w_n = 5 - \frac{8}{n}$, pour $n \geq 1$.
- d) $t_n = \frac{3}{n^2} + 1$.
- e) $a_n = 2\sqrt{n} - 4$.
- f) $b_n = (-1)^n$.

Exercice 11 — Limite de puissances

Déterminer la limite de chaque suite.

a) $u_n = 7 \times 0,6^n$.

d) $t_n = -5 \times 1,03^n$.

b) $v_n = 4 - 3 \times 0,85^n$.

e) $a_n = 9 \times 1^n$.

c) $w_n = 2 \times 1,12^n$.

f) $b_n = 3 + 8 \times 0,4^n$.

Exercice 12 — Opérations sur les limites

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes en utilisant les opérations sur les limites.

a) $u_n = 5 + \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}$.

b) $v_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(4 - \frac{3}{n}\right)$, pour $n \geq 1$.

c) $w_n = \frac{3 + 2/n}{5 - 1/n}$, pour $n \geq 1$.

d) $t_n = (4 - 0,7^n)(2 + 0,9^n)$.

Exercice 13 — Quotients de polynômes

Déterminer la limite en divisant le numérateur et le dénominateur par une puissance adaptée de n .

a) $u_n = \frac{5n + 2}{2n - 3}$.

b) $v_n = \frac{3n^2 - n + 1}{n^2 + 4}$.

c) $w_n = \frac{2n + 1}{n^2 + 3}$.

d) $t_n = \frac{-4n^2 + 3n}{2n^2 - n + 5}$.

Exercice 14 — Transformer une forme indéterminée

Pour chaque suite, mettre le terme de plus haut degré en facteur, puis déterminer la limite.

a) $u_n = n^2 - 5n$.

b) $v_n = -2n^3 + 7n^2 + 1$.

c) $w_n = \frac{n^2 - 4n}{3n + 1}$.

d) $t_n = \frac{5n^3 - n}{2n^2 + 7}$.

Exercice 15 — Comparer pour déterminer une limite

Dans chaque cas, établir une inégalité simple puis déterminer la limite.

a) $u_n = n^2 + 4n + 7$.

b) $v_n = -n^2 - 3n + 5$.

c) $w_n = n + \sqrt{n}$.

d) $t_n = -2n - \frac{1}{n+1}$.

Exercice 16 — Théorème des gendarmes

Déterminer la limite des suites suivantes en proposant un encadrement adapté.

- a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$.
- b) $v_n = \frac{\sin n}{n}$, en utilisant $-1 \leq \sin n \leq 1$.
- c) $w_n = \frac{2 + (-1)^n}{n+1}$.
- d) $t_n = 0,7^n \cos n$, en utilisant $-1 \leq \cos n \leq 1$.

Suites arithmético-géométriques**Exercice 17** — Étudier une suite arithmético-géométrique

On définit (u_n) par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,6u_n + 8$.

- a) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- b) Résoudre l'équation $L = 0,6L + 8$.
- c) On pose $v_n = u_n - L$. Montrer que (v_n) est géométrique.
- d) Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
- e) Déterminer la limite de (u_n) .

Exercice 18 — Représentation en toile d'araignée

On considère $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

- a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
- b) Dans un repère, tracer $y = 0,5x + 3$ et $y = x$.
- c) Construire graphiquement les quatre premiers termes de la suite.
- d) Conjecturer son sens de variation et sa limite.
- e) Démontrer la conjecture en donnant une formule explicite de u_n .

Modélisation**Exercice 19** — Épargne avec versements réguliers

Au début de l'année 2027, une personne place 2 000 euros sur un compte rémunéré à 3 % par an. À la fin de chaque année, après le versement des intérêts, elle ajoute 600 euros. On note u_n le capital disponible après n années et après le versement annuel.

- a) Justifier que $u_0 = 2\,000$ et $u_{n+1} = 1,03u_n + 600$.
- b) Calculer u_1 et u_2 .
- c) Déterminer la solution constante L associée à la relation de récurrence.
- d) Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 20 — Amortissement d'une dette

Une entreprise doit 50 000 euros. Chaque année, la dette restante augmente de 2 % à cause des intérêts, puis l'entreprise rembourse 8 000 euros. On note d_n la dette après n années, juste après le remboursement.

- Écrire une relation de récurrence vérifiée par (d_n) .
- Calculer d_1 , d_2 et d_3 .
- Déterminer une expression de d_n tant que le modèle reste pertinent.
- Expliquer pourquoi ce modèle ne peut pas être prolongé indéfiniment pour représenter une dette réelle.

Exercice 21 — Population de poissons

Un bassin contient initialement 120 poissons. Chaque année, 85 % des poissons survivent, puis 45 nouveaux poissons sont introduits. On note p_n le nombre théorique de poissons après n années, une fois l'introduction effectuée.

- Écrire la relation de récurrence définissant (p_n) .
- Calculer les trois termes qui suivent p_0 .
- Déterminer la population d'équilibre.
- Exprimer p_n en fonction de n , puis étudier son sens de variation et sa limite.

Exercice 22 — Diffusion d'une publicité

Une vidéo est connue initialement par 5 000 personnes. Chaque semaine, 70 % des personnes qui la connaissent encore s'y intéressent et une campagne publicitaire touche 9 000 nouvelles personnes. On modélise l'audience par

$$a_0 = 5\,000 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = 0,7a_n + 9\,000.$$

- Calculer a_1 et a_2 .
- Déterminer la valeur d'équilibre du modèle.
- Exprimer a_n en fonction de n et déterminer sa limite.
- Étudier le sens de variation de (a_n) .

Exercice 23 — Problème de synthèse : traitement d'un polluant

Une cuve contient initialement 80 mg d'un polluant. Chaque jour, un dispositif élimine 25 % de la quantité présente, puis un apport extérieur ajoute 6 mg. On note u_n la quantité de polluant, en mg, à la fin du jour n .

- Justifier que $u_{n+1} = 0,75u_n + 6$.
- Déterminer la valeur d'équilibre L et expliquer sa signification.
- Montrer que $u_n = 24 + 56 \times 0,75^n$.
- Étudier le sens de variation de (u_n) et déterminer sa limite.
- On note $Q_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Exprimer Q_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de la quantité moyenne $M_n = \frac{Q_n}{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.